Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Computación

Lecturas en Ciencias de la Computación
ISSN 1316-6239

Guía de Matemáticas Discretas I

Prof. Marlliny Monsalve

ND 2007-02

Centro CCCT
Caracas, Abril, 2007.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Computación
Centro de Cálculo Científico y Tecnológico

Nota de Docencia para Matemáticas Discretas I

Realizado por:

Prof. Marlliny Monsalve L.

Última Actualización: Junio de 2008

Contenido

Introducción

En primer lugar tenga en cuenta que esta guía no pretende ser un libro texto ni nada que se la parezca, es sólo lo que su nombre indica: una guía para Matemáticas Discretas I. No es objetivo de esta guía quitarle al estudiante el placer de sentarse en una biblioteca a estudiar con un libro especializado en el tema, lamentablemente algunos de los estudiantes no han descubierto ese placer, así que los invito a visitar cualquier biblioteca de la Universidad y a solicitar un libro de lógica. Digo cualquier biblioteca porque el estudio de la lógica simbólica no se remite a la carrera de Computación de la Facultad de Ciencias, sino que es un curso que, aunque con nombres diversos, se estudia en muchas carreras. Piense que lo anterior le puede servir de consuelo: No sólo los computistas (o futuros computistas) tienen que estudiar lógica. Ahora bien, por qué se encuentra tan difundido el estudio de la lógica, y por favor no de como respuesta: porque es parte de un plan macabro para torturar a los estudiantes. El estudio de la lógica se encuentra tan difundido, porque sus objetos de estudio: los razonamientos, son la piedra angular para el desarrollo de las Ciencias y de cualquier actividad humana, ya que el ser humano tiene como característica fundamental el ser racional.

Esta guía, que no es más que una herramienta para el curso de Matemáticas discretas I, se escribió tratando de conservar la mayor formalidad posible a la hora de definir conceptos asociados al estudio de la lógica. La bibliografía usada para la redacción de la presente guía, aparte de las notas de clases, se lista a continuación: [2, 3, 4, 5, 1, 6].

Ya para finalizar esta breve introducción quisiera dar gracias públicas al **Prof. Luis Manuel Hernández** quien de manera muy amable se tomó el trabajo de leer la guía y me ofreció muchas sugerencias para mejorarla en cuanto a contenido y a redacción. Y con la idea de mejorar este trabajo, les invito hacerme llegar cualquier sugerencia que consideren pertinente: La opinión de los estudiantes siempre resulta valiosa. Las sugerencias me las pueden hacer llegar via mail a la dirección `mmonsalv@kuaimare.ciens.ucv.ve`.

Prof. Marlliny Monsalve

Capítulo 1

De qué trata la Lógica?

Detenga a pensar en que se diferencia un mono de un ser humano. Es seguro que ya la respuesta la tiene en la punta de la lengua: "la diferencia fundamental es que los seres humanos somos animales *racionales* y los monos no lo son". Visto así, eso de ser *racionales* es algo tan importante que nos diferencia del resto de los animales y por tanto usted no puede andar por la vida sin entender bien que es eso de *razonar*. Según la Real Academia Española razonar es "inferir, ordenando ideas en la mente para llegar a una conclusión". Es decir, dado un conjunto de hechos, el ser humano es capaz de obtener una conclusión de esos hechos.

Hasta este punto, tenemos claro que el ser humano posee como característica espacial la capacidad de razonar, ahora bien, ¿será que siempre razonamos de manera correcta?, es decir, dado un conjunto de hechos y luego de "ordenar las ideas en la mente" para finalmente producir una conclusión, ¿será que siempre esa conclusión se desprende de esos hechos iniciales". La respuesta a esas preguntas es un rotundo NO. Teniendo en cuanta lo anterior surge la imperiosa necesidad de saber cuando nuestros razonamientos son correctos o no.

Teniendo en cuenta la breve disertación anterior, estamos en capacidad de definir[1] que es la lógica

Definición 1.1 *Ciencia que proporciona principios y métodos que, aplicados a la estructura de los razonamientos, nos permiten decir si éstos son correctos o no. [1]*

---

[1] Podrían darse muchas definiciones

Capítulo 2

Lógica proposicional

Como mencionamos anteriormente los objetos de estudio de la lógica son los razonamientos. Ahora bien, cuando razonamos empleamos cierto tipo de oraciones del nuestro lenguaje natural que nos permiten afirmar ciertos hechos, y a partir de la veracidad de esos hechos tratamos de desprender la veracidad de otras afirmaciones. Este tipo de oraciones recibe el nombre de *proposiciones*, que son oraciones que pueden ser verdaderas o falsas, pero no ambas a la vez. Esta característica de las proposiciones, marca la diferencia fundamental entre otro tipos de oraciones tales como las preguntas, las órdenes, las exclamaciones, pues sólo las proposiciones se pueden juzgar como verdaderas o falsas. Para aclarar más este punto considere los siguientes enunciados:

(a) ¡ Que hermoso día!.

(b) ¿ Qué hora es?.

(c) ¡¡Ponte a estudiar!!.

(d) Juan compró una casa.

(e) 4+3=8.

La oración **(a)** no es ni verdadera ni falsa, sencillamente es una exclamación acerca de la belleza del día.

La oración **(b)** es una pregunta, por lo tanto no es ni verdadera ni falsa, es sólo una pregunta.

La oración **(c)** es una orden, no es ni verdadera ni falsa.

La oración **(d)** es una *proposición*. Si realmente Juan compró la casa la proposición es verdadera en caso contrario la proposición es falsa.

La oración **(e)** es también una *proposición*. En este caso es claro que es una proposición falsa.

Definición 2.1 *Cualquier oración que o bien verdadera o bien falsa se denomina proposición. Cuando la proposición es verdadera se dice que posee valor de verdad verdadero (proposición verdadera) y cuando es falsa se dice que posee valor de verdad falso (proposición falsa).*

Emplearemos letras minúsculas para representar las proposiciones, así denotaremos por p a la proposición "Juan compró una casa" y por q a la proposición "Juan compró un carro".

Observe que estas dos proposiciones permiten construir otras proposiciones:

- $r : p$ y q. Donde r se lee, "Juan compró una casa" y "Juan compró un carro".
- $s : p$ o q, Donde s se lee, "Juan compró una casa" o "Juan compró un carro".

En este ejemplo p y q son *proposiciones simples* u atómicas, mientras que r y s son *proposiciones compuestas*.

Definición 2.2 *Toda proposición que no pueda subdividirse en otras proposiciones se denomina proposición simple. En caso contrario se denomina proposición compuesta.*

Observación:

- Las proposiciones r y s se forman "conectando" a las proposiciones p y q. Así la proposición compuesta r está conformada por las proposiciones p y q conectadas a través de un "y". Mientras que s está compuesta por p y q pero "conectadas" a través de un "o".

- El valor de verdad de r y s depende del valor de verdad de p y q. Por ejemplo suponga que tanto p como q poseen valor de verdad falso, es decir, no es cierto que Juan compró una casa y también es falso que compró un carro, es claro que el valor de verdad de r es también falso.

Para construir proposiciones compuestas requerimos de los llamados "conectores lógicos", que no son más que ciertas palabras y/o símbolos de nuestro lenguaje natural que nos permitirán, valga la redundancia, conectar proposiciones para crear otras nuevas. En la siguiente sección explicaremos cuáles son esas palabras y cuáles son las reglas que debemos seguir para garantizar que las proposiciones construidas sean correctas.

2.1 Conexiones lógicas

Imagine por un momento la cantidad de palabras que existen en el Español que nos permiten conectar dos proposiciones cualesquiera para formar una nueva proposición. Claramente son muchas, sin embargo en la lógica formal prestaremos especial importancia sólo a cinco frases fundamentales[1]

Las palabras que utilizaremos son: "no", "y", "o", "si ... entones..." y "si y sólo si". Cada una de estas palabras está asociada a un conector lógico: *negación, conjunción, disyunción, condicional* y *bicondicional* respectivamente. Se estudiará cada uno de estos conectores en detalle.

2.1.1 Negación

Definición 2.3 *Sea p una proposición. Entonces la proposición $\neg p$ se denomina negación de p. El conector $\neg$ se lee "no". Por lo tanto $\neg p$ se lee "no p". La proposición $\neg p$ posee valor de verdad verdadero si p es falsa y posee valor de verdad falso cuando p es verdadera.*

Los posibles valores de verdad que puede tomar una proposición compuesta, se puede describir mediante una **tabla de verdad**.

Definición 2.4 *Una tabla de verdad de una proposición compuesta $\mathcal{P}$ formada por las proposiciones $p_1, p_2, \cdots, p_n$ enumera TODAS las combinaciones posibles de los valores de verdad de $p_1, p_2, \cdots, p_n$ donde V indica valor de verdad verdadero y F indica valor de verdad falso, de modo que para cada una*

[1]Como ve esto se pone sencillo!!.

de estas combinaciones se indica el valor de verdad de $\mathcal{P}$. La tabla de verdad posee 2^n filas, siendo n el número de proposiciones simples que componen a $\mathcal{P}$.

Usando la definición anterior, obtenemos que la tabla de verdad de la negación viene dada por la tabla 2.1

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabla 2.1: Tabla de verdad de la Negación.

Nota. En el lenguaje natural, puede haber varias maneras de indicar la negación de una proposición. A continuación colocamos algunas expresiones de nuestro lenguaje natural que se simbolizan como $\neg p$:

1. no p.
2. no es cierto que p.
3. no es el caso que p.
4. es falso que p.

2.1.2 Conjunción

Definición 2.5 *Sean p y q dos proposiciones. Entonces la proposición $p \wedge q$ se denomina conjunción de p y q. El conector $\wedge$ se lee "y". Por lo tanto $p \wedge q$ se lee "p y q". La proposición $p \wedge q$ posee valor de verdad verdadero si y sólo si tanto p como q poseen valor de verdad verdadero.*

La tabla de verdad de la conjunción viene dada por la tabla 2.2

Observación:

- En la tabla 2.2 aparecen las cuatro combinaciones posibles de las asignaciones de valores de verdad de p y q.
- La definición (2.5) establece que $p \wedge q$ es verdadera sólo cuando, tanto p como q son verdaderas, en cualquier otro caso $p \wedge q$ es falsa.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 2.2: Tabla de verdad de la Conjunción.

Nota. En el lenguaje natural, puede haber varias maneras de indicar una conjunción entre proposiciones. A continuación colocamos algunas expresiones de nuestro lenguaje natural que se simbolizan como $p \wedge q$:

1. p y q.
2. p pero q.
3. p no obstante q.
4. p sin embargo q.

Por otro lado, la palabra "y" no siempre denota una conjunción. Por ejemplo la palabra "y" en la frase "Carlos y María son amigos" no denota una conjunción.

2.1.3 Disyunción

Definición 2.6 *Sean p y q dos proposiciones. Entonces la proposición $p \vee q$ se denomina disyunción de p y q. El conector $\vee$ se lee "o". Por lo tanto $p \vee q$ se lee "p o q". La proposición $p \vee q$ posee valor de verdad falso si y sólo si tanto p como q poseen valor de verdad falso simultáneamente.*

La tabla de verdad de la disyunción viene dada por la tabla 2.3

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 2.3: Tabla de verdad de la Disyunción.

Nota. En el lenguaje natural, puede haber varias maneras de representar una disyunción entre proposiciones. A continuación colocamos algunas expresiones de nuestro lenguaje natural que se simbolizan como $p \vee q$:

1. p o q.
2. al menos p o q.

Observación:

- La definición (2.6) establece que $p \vee q$ es falsa sólo cuando, tanto p como q son falsas, en cualquier otro caso $p \vee q$ es verdadera.
- Cabe señalar que la palabra "o" puede ser usada de manera inclusiva o exclusiva: En la oración "Llueve o hace frío" no se excluye ninguna de las dos posibilidades, es decir, puede llover y hacer frío a la vez. En este contexto la palabra "o" es *inclusiva*. Por otro lado en la oración "Carlos está muerto o desmayado", es claro que ambas situaciones no pueden ser verdad al mismo tiempo, por lo que la palabra "o" en este caso actúa de forma *exclusiva*. La tabla (2.3) esta asociada a la palabra "o" en el sentido inclusivo.
- En esta guía, el "o" en el sentido exclusivo no será considerado un conector pues este sentido exclusivo puede construirse usando a la negación, la conjunción y la disyunción. La proposición $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ indica que o bien ocurre p o bien ocurre q pero no ambas a la vez. Para clarificar este punto observe la tabla (2.4)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F

Tabla 2.4: Tabla de verdad de la Disyunción exclusiva.

2.1.4 Condicional

Definición 2.7 *Sean p y q dos proposiciones. Entonces la proposición $p \to q$ se denomina condicional de p y q. El conector $\to$ se lee "Si … entonces …".*

Por lo tanto $p \to q$ se lee "Si p entonces q". La proposición $p \to q$ posee valor de verdad falso si y sólo si, p es verdadera y q es falsa. La proposición p recibe el nombre de ANTECEDENTE (CONDICIÓN SUFICIENTE) y q recibe el nombre de CONSECUENTE (CONDICIÓN NECESARIA).

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 2.5: Tabla de verdad del Condicional.

Observación:

- La definición (2.7) establece que $p \to q$ es falsa sólo cuando, p es verdadera y q es falsa, en cualquier otro caso $p \to q$ es verdadera.
- Como veremos más adelante el conector $\to$ es muy importante en la construcción de razonamientos lógicos !!

Nota. En el lenguaje natural, puede haber varias maneras de indicar un condicional entre proposiciones. A continuación colocamos algunas expresiones de nuestro lenguaje natural que se simbolizan como $p \to q$:

1. Si p entonces q.
   Si $\underbrace{\text{María está embarazada}}_{p}$, entonces $\underbrace{\text{tuvo relaciones sexuales}}_{q}$.
2. p implica q.
   $\underbrace{\text{El hecho que María esté embarazada}}_{p}$ implica $\underbrace{\text{que tuvo relaciones sexuales}}_{q}$.
3. Para p es necesario q (q es necesario para p).
   Para $\underbrace{\text{que María esté embarazada}}_{p}$ es necesario $\underbrace{\text{que tenga relaciones sexuales}}_{q}$
   $\underbrace{\text{Tener relaciones sexuales}}_{q}$ es necesario para $\underbrace{\text{que María esté embarazada}}_{p}$

4. p es suficiente para q.

$\underbrace{\text{El hecho que María este embarazada}}_{p}$ es suficiente para $\underbrace{\text{asegurar que tuvo relaciones sexuales}}_{q}$.

- Es claro que para tener un bebé es necesario tener relaciones sexuales, pero NO ES SUFICIENTE. Por otro lado, Si María está embarazada ES SUFICIENTE para asegurar que mantuvo relaciones sexuales.

5. No p a menos que q.
   María, no $\underbrace{\text{estará embarazada}}_{p}$ a menos que $\underbrace{\text{tenga relaciones sexuales}}_{q}$.
6. q cuando quieras que p.
   $\underbrace{\text{María debe tener relaciones sexuales}}_{q}$, cuando quiera $\underbrace{\text{estar embarazada}}_{p}$.
7. q siempre que p.
   $\underbrace{\text{Se puede afirmar que María tuvo relaciones sexuales}}_{q}$, siempre que $\underbrace{\text{este embarazada}}_{p}$.
8. p sólo si q.
   $\underbrace{\text{María estará embarazada}}_{p}$ sólo si $\underbrace{\text{tiene relaciones sexuales}}_{q}$.
9. q si p.
   $\underbrace{\text{María debe tener relaciones sexuales}}_{q}$, si $\underbrace{\text{quiere estar embarazada}}_{p}$.

2.1.5 Bicondicional

Definición 2.8 *Sean p y q dos proposiciones. Entonces la proposición $p \leftrightarrow q$ se denomina bicondicional entre p y q. El conector $\leftrightarrow$ se lee "si y sólo si". Por lo tanto $p \leftrightarrow q$ se lee "p si y sólo si q". La proposición $p \leftrightarrow q$ posee valor de verdad verdadero si y sólo si tanto p como q poseen el mismo valor de verdad.*

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 2.6: Tabla de verdad del Bicondicional.

Observación:

- La definición (2.8) establece que $p \leftrightarrow q$ es verdadera sólo cuando, tanto p como q poseen el mismo valor de verdad, en cualquier otro caso $p \leftrightarrow q$ es falsa.

- Con frecuencia se escribe "sii" en vez de escribir "si y sólo si".

> ***Nota.*** En el lenguaje natural, el bicondicional $p \leftrightarrow q$ se puede expresar como
>
> 1. p si y sólo si q.
>
> 2. p es necesario y suficiente para q.

2.2 Reglas de formación

Hasta ahora, tenemos definido lo que son las proposiciones simples, compuestas y los conectores lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$. Cabe señalar que el conector $\neg$ es un conector *unario* esto es, el conector $\neg$ sólo niega una proposición, mientras que el resto de los conectores son *binarios*. Ahora bien, en este sección explicaremos cómo emplear a las proposiciones simples y a los conectores para formar proposiciones compuestas.

Definición 2.9 ***Fórmula bien formada (fbf):*** *Una fbf es una expresión en la que intervienen proposiciones y conectores, que pueden formarse utilizando las siguientes reglas:*

1. *Toda proposición simple p, q, r, $\cdots$ es una fbf.*

2. *Si $\mathcal{P}$ es una fbf, entonces $\neg\mathcal{P}$ es una fbf.*

3. *Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son fbf, entonces $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$, $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$, $(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q})$ y $(\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q})$ son fbf.*

Ejemplo 2.1 *Las siguientes expresiones SON fórmulas bien formadas:*

- p

- $(p \wedge q) \vee s$

- $(\neg p \leftrightarrow r) \vee (q \rightarrow (r \wedge s))$

Las siguientes expresiones NO son fórmulas bien formadas:

- $p \vee$
- $p \rightarrow \wedge$
- $\leftrightarrow s$

2.2.1 Agrupación y paréntesis

Como se puede observar, en el ejemplo 2.1 se hace uso de los paréntesis, con el objetivo de indicar sobre cuales proposiciones actúa un conector. Esta precedencia establecida por los paréntesis nos permite leer una proposición compuesta de una forma determinada. El problema con los paréntesis es que en ocasiones, el uso excesivo de los mismos puede complicar el proceso de escritura y/o lectura de una fórmula bien formada. Así por ejemplo la proposición

$$((\neg p) \vee q) \leftrightarrow ((\neg s) \rightarrow (q \wedge p)) \tag{2.1}$$

puede escribirse como

$$\neg p \vee q \leftrightarrow (\neg s \rightarrow q \wedge p) \tag{2.2}$$

En la proposición (2.1) se emplearon 10 paréntesis, mientras que en la proposición (2.2) se emplearon sólo 2.

Con el objeto de evitar el uso excesivo de paréntesis y clarificar sobre que proposiciones actúa un determinado conector (cuando hay más de un conector) emplearemos las siguientes reglas:

1. Un conector afecta a las proposiciones inmediatas o las proposiciones inmediatas al conector que se encuentre entre paréntesis.

2. Se establece la siguiente jerarquía entre conectores lógicos:

nivel 1:	$\neg$
nivel 2:	$\wedge$, $\vee$
nivel 3:	$\rightarrow$, $\leftrightarrow$

   la jerarquía de la tabla indica que los conectores del nivel i *conectan más* que las del nivel $i+1$.

Cabe resaltar que en algunos casos, el uso de los paréntesis es imprescindible para determinar el sentido de una proposición lógica. Por ejemplo la proposición lógica $p \vee q \wedge r$ es ambigua, pues un lector podría entender $(p \vee q) \wedge r$ mientras que otro podría interpretar $p \vee (q \wedge r)$. En conclusión, cuando de tenga una proposición que involucre conectores de un mismo nivel, es necesario el uso de los paréntesis que indiquen cual conector debe aplicarse primero.

2.3 Traducción del lenguaje natural al lenguaje de la Lógica

En general el proceso de traducción requiere de mucha práctica, ya que no existen reglas fijas sobre como realizar este proceso. La traducción está estrechamente ligada al sentido que el lector le da al texto leído en lenguaje natural, pues lo que el lector comprenda es lo que tratará de traducir al lenguaje de la lógica usando proposiciones y conectores lógicos. Aunque, como hemos mencionado anteriormente, NO HAY REGLAS FIJAS PARA REALIZAR LA TRADUCCIÓN, es conveniente seguir las siguientes pautas para facilitar este proceso:

1. Leer con detenimiento el texto en lenguaje natural que se desea traducir, prestando especial atención al sentido de cada frase.

2. Identificar en la lectura del texto, las proposiciones simples y, después los conectores que puedan existir entre dichas proposiciones simples. Claramente la identificación de los conectores se realizará siguiendo el significado que le hemos dado a cada uno de estos.

3. Listar las proposiciones simples que hemos identificado, asignándole una letra a cada una de ellas, cuidando que no existan letras repetidas. Cabe señalar que en general se las proposiciones simples se identifican en forma afirmativa. Por ejemplo si tenemos una frase como “el niño no quiere comer”, se identifica como p : “el niño quiere comer” y la frase inicial se simboliza usando la negación, es decir, $\neg p$.

Ejemplo 2.2 *Simbolice el siguiente párrafo:*

"Si Dios quisiera evitar el mal pero fuese incapaz de hacerlo, sería impotente y si fuera capaz de evitar el mal pero no quisiera hacerlo, sería un miserable, por otro lado si el mal existe, Dios es un miserable y es un hecho que el mal existe. Claro está, si Dios existe, no es impotente ni miserable. Por lo tanto es seguro que Dios no existe."

1. *Una vez leído el texto con detenimiento se procede a listar a las proposiciones simples:*
   p : *Dios quiere evitar el mal.*
   q : *Dios es capaz de evitar el mal.*
   r : *Dios es impotente.*
   s : *Dios es un miserable.*
   t : *El mal existe.*
   u : *Dios existe.*

2. *Luego de identificar las proposiciones simples, se procede a identificar a los conectores lógicos: En primer lugar resaltaremos en el texto aquellas palabras (o frases) que de alguna manera sirven para unir ideas dentro del texto. Esto nos permitirá dividir el texto en frases más sencillas:*

   "Si Dios quisiera evitar el mal pero fuese incapaz de hacerlo, sería impotente y si fuera capaz de evitar el mal pero no quisiera hacerlo, sería un miserable, por otro lado si el mal existe, Dios es un miserable y es un hecho que el mal existe. Claro está, si Dios existe, no es impotente ni miserable. Por lo tanto es seguro que Dios no existe."

   Ahora, analizaremos cada frase por separado:

   - *"Si Dios quisiera evitar el mal pero fuese incapaz de hacerlo,*[2] *sería impotente"* : $p \wedge \neg q \rightarrow r$.
   - *"si fuera capaz de evitar el mal pero no quisiera hacerlo, sería un miserable:* $q \wedge \neg p \rightarrow s$.
   - *"si el mal existe, Dios es un miserable":* $t \rightarrow s$.

[2] En ocasiones en una proposición condicional, el antecedente se separa del consecuente usando una coma.

- *"es un hecho que el mal existe": t.*
- *"si Dios existe, no es impotente ni miserable": $u \to \neg r \land \neg s$.*
- *"es seguro que Dios no existe": $\neg u$*

3. *: Finalmente, la simbolización queda:*
   $(p \land \neg q \to r) \land (q \land \neg p \to s) \land (t \to s) \land t \land (u \to \neg r \land \neg s) \to u$

Capítulo 3

Equivalencia lógica

"En un juicio, el fiscal argumentó:
Si el acusado es culpable, entonces tenía un testigo."
A ello, el abogado defensor respondió inmediatamente:
"Eso es totalmente falso."
El acusado decidió despedir a su abogado defensor.
¿Tendría sentido la decisión del acusado?

3.1 Tautología y Contradicción

Las siguientes definiciones nos permiten clasificar una proposición compuesta (que debe ser una fbf), en función de los valores de verdad que posea dicha proposición.

Definición 3.1 *Se dice que una proposición compuesta es una* ***tautología****, si es verdadera para todas las posibles combinaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.*

Ejemplo 3.1 *Consideremos la expresión* $\neg(p \wedge q) \vee q$ *y su tabla de verdad:*

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q) \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

la tabla de verdad de $\neg(p \wedge q) \vee q$ muestra que esta proposición siempre es verdadera independientemente de los valores de verdad de p y q por lo tanto se concluye que $\neg(p \wedge q) \vee q$ es una tautología.

Definición 3.2 *Una proposición compuesta es una **contradicción** si es falsa para todas las posibles combinaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.*

Ejemplo 3.2 *Consideremos la expresión $\neg p \wedge p$ y su tabla de verdad:*

p	$\neg p$	$\neg p \wedge p$
V	F	F
F	V	F

la tabla de verdad de $\neg p \wedge p$ muestra que esta proposición siempre es falsa independientemente del valor de verdad de p por lo que $\neg p \wedge p$ es una contradicción.

Definición 3.3 *Una proposición compuesta que no es ni una tautología ni una contradicción se denomina **contingencia**.*

Ejemplo 3.3 *Consideremos la expresión $\neg(p \wedge q) \vee \neg q$ y su tabla de verdad:*

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg q$	$\neg(p \wedge q) \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V

la tabla de verdad de $\neg(p \wedge q) \vee \neg q$ muestra que esta proposición no es ni una tautología ni una contradicción, por lo tanto se concluye que $\neg(p \wedge q) \vee \neg q$ es una contingencia.

3.2 Leyes de equivalencia lógica

Con estas definiciones estamos en capacidad de definir lo que es una **equivalencia lógica**.

Definición 3.4 *Sean p y q dos proposiciones cualesquiera, se dice que p y q son lógicamente equivalentes, lo cual se denota por $p \Leftrightarrow q$ (o bien $p \equiv q$), si la proposición $p \leftrightarrow q$ es una tautología.*

Observación: Tenga en cuenta que el símbolo $\leftrightarrow$ representa a un conector lógico que recibe el nombre de bicondicional, así $p \leftrightarrow q$ es una proposición lógica. Por otro lado, el símbolo $\Leftrightarrow$ NO es un conector lógico y cuando se escribe $p \Leftrightarrow q$ lo que se está diciendo es que la proposición $p \leftrightarrow q$ es una tautología y esto significa que la proposición p es lógicamente equivalente a la proposición q.

Ejemplo 3.4 *Considere las siguientes proposiciones $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$. Construir la tabla de verdad de $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$*

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

al ser $\neg(p\wedge q) \leftrightarrow \neg p\vee\neg q$ una tautología podemos decir que $\neg(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q$, es decir $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ son lógicamente equivalentes.

Observación: En el ejemplo (3.4) podemos ver que la tabla de verdad de $\neg(p\wedge q)$ y de $\neg p\vee\neg q$ son las mismas, razón por la cual el bicondicional entre ellas necesariamente es una tautología. Es por esta razón que en algunos textos se da la siguiente definición de equivalencia lógica:

Definición 3.5 *Sean p y q dos proposiciones cualesquiera, se dice que p y q son lógicamente equivalentes, lo cual se denota por $p \Leftrightarrow q$ (o bien por $p \equiv q$), cuando p y q poseen la misma tabla de verdad.*

A continuación se listas las equivalencias lógicas más utilizadas:

Ley	**Nombre**
$p \vee \neg p \equiv V$	Ley de medio excluido
$p \wedge \neg p \equiv F$	Ley de contradicción
$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Leyes de identidad
$p \wedge F \equiv F$ $p \vee V \equiv V$	Leyes de dominación
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Leyes de idempotencia
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	Leyes conmutativas
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Leyes asociativas
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Leyes distributivas
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leyes de De Morgan
$p \equiv \neg(\neg p)$	Doble negación
$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$	Contraposición
$(p \to q) \equiv \neg p \vee q$	Equivalencia para la implicación
$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$	Ley del bicondicional
$(p \wedge q \to r) \equiv (p \to (q \to r))$	Ley de Exportación/Importación

Tabla 3.1: Equivalencias Lógicas.

3.3 Equivalencia y simplificación

Las leyes de equivalencia lógica son de mucha utilidad para establecer si una proposición p es lógicamente equivalente a una proposición q.

En otros casos, es necesario *simplificar* una proposición compuesta dada, es decir, dada una proposición compuesta r se desee reducirla a una proposición equivalente s más simple. La necesidad de realizar esta simplificación radica en que la proposición compuesta r puede ser redundante en cuanto a la cantidad de conectores y de proposiciones simples que están involucradas en ella.

Con los siguientes ejemplos mostraremos cómo usar las leyes de equivalencia para demostrar que dos proposiciones son lógicamente equivalente y cómo podemos simplificar una proposición dada.

Ejemplo 3.5 *Demuestre que* $\neg[\neg(p \vee r) \vee r] \vee \neg(q \to r) \equiv (p \vee q) \wedge \neg r$.

Observación: *Por definición de proposiciones lógicamente equivalentes, si se logra establecer que* $\neg[\neg(p \vee r) \vee r] \vee \neg(q \to r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg r$ *es una tautología, se estaría demostrando que* $\neg[\neg(p\vee r)\vee r]\vee\neg(q \to r) \equiv (p\vee q)\wedge\neg r$. *Lo anterior se puede realizar por dos vías: mediante las* ***tablas de verdad*** *y mediante el uso de las* ***leyes de equivalencia lógica***.

1. Usando tablas de verdad. [1]

Denotemos por $\mathcal{P}$ *a la proposición compuesta* $\neg[\neg(p \vee r) \vee r] \vee \neg(q \to r)$ *y sea* $\mathcal{Q}$ *la proposición* $(p \vee q) \wedge \neg r$. *Observe que la proposición* $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ *está compuesta por tres proposiciones simples:* p, q, r. *Por lo tanto la tabla de verdad posee* $2^3 = 8$ *filas.*

p	q	r	$p \vee r$	$\neg(p \vee r)$	$\neg(p \vee r) \vee r$	$\neg[\neg(p \vee r) \vee r]$	$\neg(q \to r)$	$\mathcal{P}$	$p \vee q$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V	V	F	V	F	F	F	V	F	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	F	F	V	V	F	F	F	F	F	V

[1] Si deseamos probar la equivalencia lógica entre p y q usando tablas de verdad, se tiene que tener en cuenta que la cantidad de filas de la tabla serán 2^n siendo n la cantidad de proposiciones simples involucradas en la expresión $p \leftrightarrow q$.

de la tabla se desprende que $\neg[\neg(p \vee q) \vee r] \vee \neg(q \to r) \equiv (p \vee q) \wedge \neg r$.

2. ***Usando equivalencias lógicas.***
Es este caso tomamos como punto de partida a la proposición $\mathcal{P}$*. Si mediante el uso de las equivalencias lógicas listadas en la tabla (3.1) podemos obtener a partir de* $\mathcal{P}$ *a la proposición* $\mathcal{Q}$*, entonces habremos demostrado que* $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$.

	$\neg[\neg(p \vee r) \vee r] \vee \neg(q \to r)$	***Justificación***
$\equiv$	$\neg[\neg[(p \vee r) \wedge \neg r]] \vee \neg(q \to r)$	*Ley de De Morgan para* $\wedge$
$\equiv$	$((p \vee r) \wedge \neg r) \vee \neg(q \to r)$	*Doble negación*
$\equiv$	$(\neg r \wedge (p \vee r)) \vee \neg(q \to r)$	*Ley conmutativa para* $\wedge$
$\equiv$	$((\neg r \wedge p) \vee (\neg r \wedge r)) \vee \neg(q \to r)$	*Ley distributiva para* $\wedge$
$\equiv$	$((\neg r \wedge p) \vee F) \vee \neg(q \to r)$	*Ley de contradicción*
$\equiv$	$(\neg r \wedge p) \vee \neg(q \to r)$	*Ley de identidad para* $\vee$
$\equiv$	$(\neg r \wedge p) \vee \neg(\neg q \vee r)$	*Equiv. para la implicación*
$\equiv$	$(\neg r \wedge p) \vee (\neg(\neg q) \wedge \neg r)$	*Ley de De Morgan para* $\vee$
$\equiv$	$(\neg r \wedge p) \vee (q \wedge \neg r)$	*Doble negación*
$\equiv$	$(\neg r \wedge p) \vee (\neg r \wedge q)$	*Ley conmutativa para* $\wedge$
$\equiv$	$\neg r \wedge (p \vee q)$	*Ley distributiva para* $\wedge$
$\equiv$	$(p \vee q) \wedge \neg r$	*Ley conmutativa para* $\wedge$

Como en cada paso hemos usado leyes de equivalencia lógica, podemos garantizar que los valores de verdad de $\mathcal{P}$ son los mismos que los de $\mathcal{Q}$, con lo cual hemos demostrado que $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$.

Ejemplo 3.6 *Simplificar la proposición* $[(p \to p) \vee q] \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge [p \to (p \vee \neg q)]$

Observación: *A diferencia del ejemplo anterior, en este ejemplo el uso de las tablas de verdad no está claro, pues aún no sabemos a que proposición es equivalente la proposición dada, por lo que no podemos verificar si el bicondicional entre ellas es una tautología. Sin embargo, hay que tener en cuenta que siempre es posible "conjeturar", es decir, el lector puede suponer que la proposición dada es equivalente a una proposición* $\mathcal{Q}$ *y hacer la tabla de verdad de* $[(p \to p) \vee q] \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge [p \to (p \vee \neg q)] \leftrightarrow \mathcal{Q}$ *y en caso de* *obtener que esta última expresión es una tautología, estaría demostrando que la proposición dada es lógicamente equivalente a $\mathcal{Q}$. La principal desventaja de esta forma de enfrentar el problema es que escoger $\mathcal{Q}$ puede convertirse en un proceso de ensayo y error.*

En este ejemplo, no supondremos a una proposición $\mathcal{Q}$, sino que por el contrario tomaremos como punto de partida a la proposición dada y usando las leyes de equivalencia lógica trataremos de encontrar una proposición equivalente más simple.

$[(p \to p) \vee q] \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge [p \to (p \vee \neg q)]$	***Justificación***
$\equiv [(\neg p \vee p) \vee q] \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge [\neg p \vee (p \vee \neg q)]$	*Equiv. para la implicación*
$\equiv [(\neg p \vee p) \vee q] \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge [(\neg p \vee p) \vee \neg q]$	*Ley asociativa para* $\vee$
$\equiv [(p \vee \neg p) \vee q] \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge [(p \vee \neg p) \vee \neg q]$	*Ley conmutativa para* $\vee$
$\equiv [V \vee q] \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge [V \vee \neg q]$	*Ley de medio excluido*
$\equiv [q \vee V] \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge [\neg q \vee V]$	*Ley conmutativa para* $\vee$
$\equiv V \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge V$	*Ley de dominación para* $\vee$

$\equiv V \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)]$	*Ley de identidad para* $\wedge$
$\equiv [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge V$	*Ley conmutativa para* $\wedge$
$\equiv \neg q \vee (r \wedge q)$	*Ley de identidad para* $\wedge$
$\equiv (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee q)$	*Ley distributiva para* $\vee$
$\equiv (\neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg q)$	*Ley conmutativa para* $\vee$
$\equiv (\neg q \vee r) \wedge V$	*Ley de medio excluido*
$\equiv (\neg q \vee r)$	*Ley de identidad para* $\wedge$

Finalmente se puede concluir que $[(p \to p) \vee q] \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge [p \to (p \vee \neg q)] \equiv (\neg q \vee r)$

Una aplicación importante del proceso de simplificación de expresiones lógicas, es la simplificación de circuitos lógicos. Este es el tema de la próxima sección.

3.4 Circuitos lógicos

Como hemos mencionado, una proposición p es una oración que, o bien es verdadera, o bien en falsa. Esta idea de dualidad, la podemos asociar con un circuito.

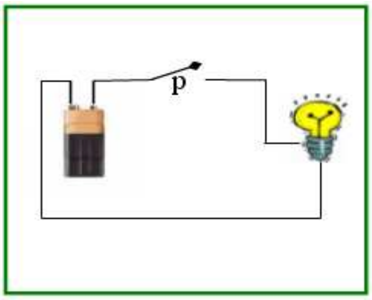

Figura 3.1: Circuito lógico.

En la figura (3.1) podemos observar que la única manera que el bombillo se encienda es que el conmutador p este pulsado. Ahora bien, podemos asociar al conmutador p con una proposición p cualquiera, y decir que el conmutador está pulsado, es igual a decir que la proposición p posee valor de verdad verdadero. Teniendo en cuenta esta analogía, en la figura (3.1) se puede observar que sólo se logrará encender el bombillo cuando se cierre el circuito (hay flujo de corriente) y esto se logra cuando p es verdadera, mientras que cuando p es falsa el circuito estará abierto (no hay pase de corriente) y por tanto el bombillo se mantendrá apagado.

En esta nueva situación, a los conectores lógicos $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ se les puede asociar un tipo de circuito en particular, analizaremos cada caso.

3.4.1 Circuito negación

En este caso sólo se logrará encender el bombillo cuando $\neg p$ sea verdadera (por lo tanto p debe ser falso) y cuando $\neg p$ sea falso (p verdadera) no circulará corriente por el circuito.

p	$\neg p$
V	F
F	V

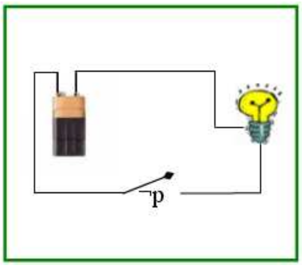

Tabla 3.2: Tabla de verdad del $\neg$ y circuito asociado.

3.4.2 Circuito conjunción

En este caso sólo se logrará encender el bombillo cuando tanto p como q sean verdaderas, en caso contrario, no circulará corriente por el circuito. Este tipo de circuito recibe el nombre de *circuito serial*.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

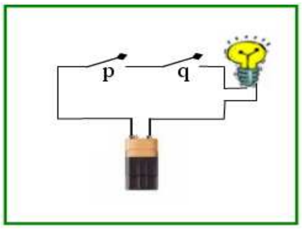

Tabla 3.3: Tabla de verdad del $\wedge$ y circuito serial.

3.4.3 Circuito disjunción

En este caso, el bombillo se mantendrá encendido a menos que p y q sean falsas simultáneamente, en cualquier otro caso. Este tipo de circuito recibe el nombre de *circuito paralelo*.

Con el siguiente ejemplo veremos como se aplica la simplificación de expresiones lógica a la simplificación de circuitos.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

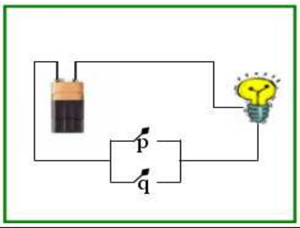

Tabla 3.4: Tabla de verdad del $\vee$ y circuito paralelo.

Ejemplo 3.7 *Simplifique circuito de la figura (3.2)*

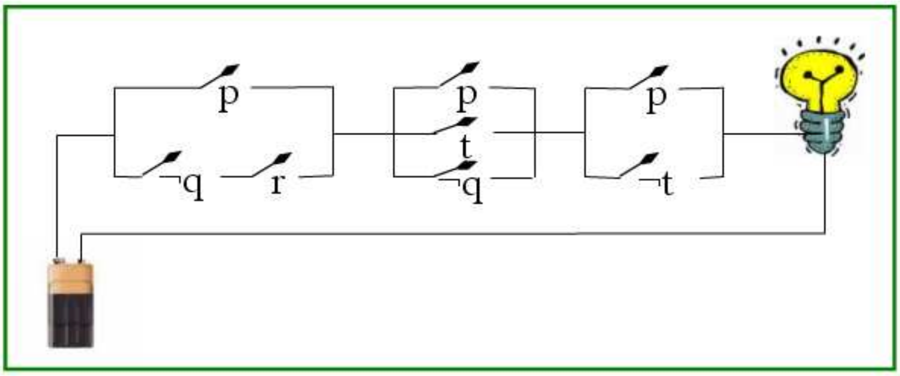

Figura 3.2: Circuito lógico original.

El circuito de la figura (3.2) puede representarse mediante la siguiente proposición lógica

$$(p \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (p \vee t \vee \neg q) \wedge (p \wedge \neg t) \tag{3.1}$$

ahora la proposición (3.1) se simplificará hasta obtener una proposición equivalente más sencilla:

$(p \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (p \vee t \vee \neg q) \wedge (p \wedge \neg t)$	***Justificación***
$\equiv p \vee [(\neg q \wedge r) \wedge (t \vee \neg q) \wedge \neg t]$	*Ley distributiva para* $\vee$
$\equiv p \vee [(\neg q \wedge r) \wedge ((t \vee \neg q) \wedge \neg t)]$	*Ley asociativa para* $\wedge$
$\equiv p \vee [(\neg q \wedge r) \wedge (\neg t \wedge (t \vee \neg q))]$	*Ley conmutativa para* $\wedge$
$\equiv p \vee [(\neg q \wedge r) \wedge ((\neg t \wedge t) \vee (\neg t \wedge \neg q))]$	*Ley distributiva para* $\wedge$
$\equiv p \vee [(\neg q \wedge r) \wedge (F \vee (\neg t \wedge \neg q))]$	*Ley de contradicción*
$\equiv p \vee [\neg q \wedge r \wedge \neg t \wedge \neg q]$	*Ley de identidad para* $\vee$
$\equiv p \vee [\neg q \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg t]$	*Ley conmutativa para* $\wedge$
$\equiv p \vee [(\neg q \wedge \neg q) \wedge r \wedge \neg t]$	*Ley asociativa para* $\wedge$
$\equiv p \vee [\neg q \wedge r \wedge \neg t]$	*Ley de idempotencia para* $\wedge$

Hasta este punto se ha demostrado que la proposición 3.1 es equivalente a

$$p \vee [\neg q \wedge r \wedge \neg t] \tag{3.2}$$

es decir, se demostró que $(p \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (p \vee t \vee \neg q) \wedge (p \wedge \neg t) \equiv p \vee [\neg q \wedge r \wedge \neg t]$.

Finalmente en la figura (3.3) se observa el circuito que se construyó usando a la proposición 3.2. El circuito (3.3) es equivalente al circuito original.

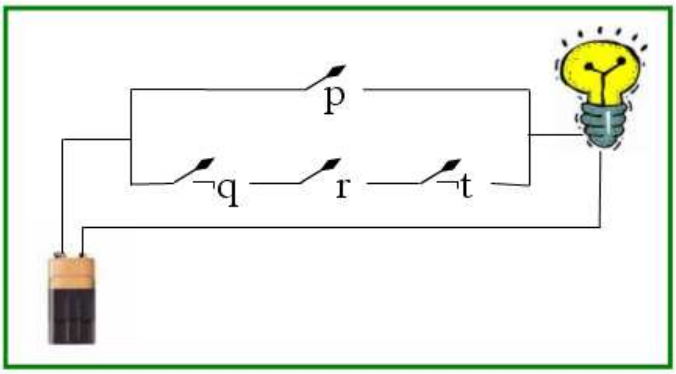

Figura 3.3: Circuito lógico reconstruido.

Capítulo 4

Implicación lógica

”Impugno la validez y, por consiguiente, los resultados de una razón cultivada por medio de cualquier forma especial que no sea la lógica abstracta”.
Auguste Dupin en “La carta robada”. [1]

Definición 4.1 *Sean p y q dos proposiciones cualesquiera, se dice que p implica lógicamente a q (o q es consecuencia lógica de p), lo cual se denota por $p \Rightarrow q$ si y sólo si la proposición $p \rightarrow q$ es una tautología.*

Observación: Tenga en cuenta que el símbolo $\rightarrow$ representa a un conector lógico que recibe el nombre de condicional, así $p \rightarrow q$ es una proposición lógica. Por otro lado, el símbolo $\Rightarrow$ NO es un conector lógico y cuando se escribe $p \Rightarrow q$ lo que se está diciendo es que la proposición $p \rightarrow q$ es una tautología y esto significa que la proposición p implica lógicamente a la proposición q.

4.1 Argumentación lógica

Definición 4.2 *Un argumento* [2] *es una estructura de la forma*

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q \tag{4.1}$$

[1]Auguste Dupin fue un personaje creado por Edgar Allan Poe, quien es considerado por los entendidos como el padre de la novela policiaca. La carta robada data de 1844.
[2]Razonamiento

*donde $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$ son proposiciones que reciben el nombre de **premisas** y q es una proposición llamada **conclusión**. También es común representar a los argumentos con la siguiente estructura*

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

4.1.1 Argumentos válidos

Definición 4.3 *Un argumento es válido si las premisas implican lógicamente a la conclusión [3]. Esta definición es equivalente a decir que un argumento (4.1) es válido si $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \Rightarrow q$, es decir si la proposición $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$ es una tautología.*

Ejemplo 4.1 *Demuestre que $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$*

*En este caso hay que probar que $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ es una tautología. Tenemos dos maneras de hacer esta prueba, la primera es usando **tablas de verdad** y la segunda usando leyes de **equivalencia lógica**.*

1. ***Usando tablas de verdad.***

			Premisas	***Conclusión***	
p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	q	$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Dado que $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ es una tautología, podemos concluir que $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$.

2. ***Usando equivalencias lógicas.*** *Dado que el objetivo es verificar si $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ es una tautología podemos simplificar esta proposición,*

[3] También se dice que un argumento es válido cuando la conclusión es consecuencia lógica de las premisas

usando leyes de equivalencia, a otra que siempre sea verdadera.

$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$	***Justificación***
$\equiv p \wedge (\neg p \vee q) \rightarrow q$	*Equiv. para la implicación*
$\equiv \neg[p \wedge (\neg p \vee q)] \vee q$	*Equiv. para la implicación*
$\equiv [\neg p \vee \neg(\neg p \vee q)] \vee q$	*Ley de De Morgan para* $\wedge$
$\equiv [\neg p \vee (\neg(\neg p) \wedge \neg q)] \vee q$	*Ley de De Morgan para* $\vee$
$\equiv [\neg p \vee (p \wedge \neg q)] \vee q$	*Doble negación*
$\equiv [(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee q$	*Ley distributiva para* $\vee$
$\equiv [(p \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee q$	*Ley conmutativa para* $\vee$
$\equiv [V \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee q$	*Ley de medio excluido*
$\equiv [(\neg p \vee \neg q) \wedge V] \vee q$	*Ley conmutativa para* $\vee$
$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee q$	*Ley de identidad para* $\wedge$
$\equiv \neg p \vee (\neg q \vee q)$	*Ley asociativa para* $\vee$
$\equiv \neg p \vee (q \vee \neg q)$	*Ley conmutativa para* $\vee$
$\equiv \neg p \vee V$	*Ley de medio excluido*
$\equiv V$	*Ley de dominación para* $\vee$

Hemos demostrado que $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv V$*, lo cual quiere decir que hemos comprobado que* $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ *es una tautología, por lo tanto* $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$*.*

Observación: Para clarificar mejor el concepto de razonamiento válido conviene recordar la tabla de verdad del condicional

	p	q	$p \rightarrow q$
Caso 1	V	V	V
Caso 2	V	F	F
Caso 3	F	V	V
Caso 4	F	F	V

Tabla 4.1: Tabla de verdad del Condicional.

- De la definición de argumento se desprende que si al menos una de las premisas es falsa entonces $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n$ será una proposición falsa y por tanto la proposición $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$ será una tautología, independientemente del valor de verdad de q, ya que en la tabla (4.1) se puede observar que, cuando el antecedente del condicional es falso la proposición condicional siempre es verdadera independientemente del valor del consecuente (Caso 3 y 4). Finalmente, según la definición de argumento válido, un argumento que posea al menos una premisa falsa es válido.

- En el caso en que TODAS las premisas sean verdaderas, se tiene que $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n$ es una proposición verdadera. En este caso la única manera que $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$ sea una tautología, y por tanto el argumento sea válido, es que la proposición q también sea verdadera (Caso 1 de la tabla (4.1)).

- Finalmente cuando $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n$ es una proposición verdadera, es decir, todas las premisas son verdaderas, y q es una proposición falsa se tiene que $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$ es una proposición falsa (Caso 4 de la tabla (4.1)) y este el único caso en que podemos aseverar que el argumento es inválido.

4.1.2 Argumentos inválidos

Es claro que un argumento es inválido cuando no es válido. Un argumento inválido recibe el nombre de falacia. Ahora bien, una forma más práctica para identificar si el argumento (4.1) es inválido es tratar de establecer al menos una combinación de valores de verdad de las proposiciones simples que conforman al argumento, tal que $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n$ (conjunción de premisas) sea una proposición verdadera[4], y q (conclusión) sea falsa. Esa combinación de valores de verdad lograría que la proposición $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$ sea falsa, con lo cual el argumento (4.1) no puede ser válido, pues $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$ no puede ser una tautología.

Ejemplo 4.2 *Establezca si el argumento $q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow p$ es válido o inválido.*

Si se logran establecer valores de verdad de p y q tal que $q \wedge (p \rightarrow q)$ (conjunción de premisas) sea verdadera y p (conclusión) sea falsa, se estaría

[4]Observe que esto sólo se logra cuando TODAS las premisas son verdaderas

demostrando que el argumento es inválido.

p	q	$p \to q$	$q \wedge (p \to q)$	$q \wedge (p \to q) \to p$
F	V	V	V	F

Hemos encontrado al menos una combinación de valores de verdad de p y q para los cuales las premisas son todas verdaderas y la conclusión es falsa, por lo tanto el argumento es inválido.

Sin embargo, con la intención de hacer unos comentarios importantes, escribiremos la tabla de verdad completa del argumento dado.

p	q	$p \to q$	$\overbrace{q \wedge (p \to q)}^{Premisas}$	$\overbrace{p}^{Conclusion}$	$q \wedge (p \to q) \to p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V

Lo importante de observar aquí, es que $q \wedge (p \to q) \to p$ NO es una tautología, por la tanto el argumento dado NO es un argumento válido. El hecho que exista una combinación de valores de verdad de las proposiciones simples (p y q) que logran que, tanto las premisas como la conclusión sean verdaderas, no garantiza que el argumento sea válido, ya que TODAS las combinaciones deben satisfacer que $q \wedge (p \to q) \to p$ sea una proposición verdadera.

4.2 Reglas de inferencia lógica

El proceso de obtención de la conclusión a partir de las premisas se denomina *inferencia lógica*. Existen diferentes métodos de hacer inferencia lógica, pero todos ellos hacen uso de argumentos elementales que se denominan *reglas de inferencia*. El proceso de inferencia lógica es tal que, si todas las premisas son verdaderas al mismo tiempo, toda proposición que se obtenga por la aplicación de reglas de inferencia (o de equivalencias lógica) serán consecuencia lógica de las premisas. Así que, si por la aplicación de estas reglas, se obtiene la conclusión del argumento, ésta será consecuencia lógica de las premisas y por tanto el argumento (4.1) será válido.

Ahora bien, cuando se logra establecer que un argumento es válido a través del proceso de inferencia lógica, se puede afirmar que siempre que todas las premisas del argumento sean verdaderas al mismo tiempo, la conclusión de dicho argumento también es una proposición verdadera.

A continuación listamos las reglas de inferencia más usadas y luego describiremos en detalle algunos de los métodos para hacer inferencia lógica.

Regla	**Nombre**
$p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$	*Modus ponendo ponens*
$\neg q \wedge (p \to q) \Rightarrow \neg p$	*Modus tollendo tollens*
$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$ $(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$	Silogismo disyuntivo
$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$	Silogismo hipotético
$(p \wedge q) \Rightarrow p$ $(p \wedge q) \Rightarrow q$	Ley de simplificación
$p \Rightarrow p \vee q$	Ley de adición
$p, q \Rightarrow p \wedge q$	Ley de conjunción
$(p \to q) \wedge (\neg p \to q) \Rightarrow q$	Ley de casos

Tabla 4.2: Reglas de Inferencia Lógica

Nota. En el ejemplo (4.1) se demostró que la regla de equivalencia del *Modus ponendo ponens* es un argumento válido.

4.3 Métodos para probar la validez de un argumento

Los métodos a estudiar son los siguientes:

1. Prueba por tablas de verdad.
2. Prueba por equivalencias lógicas.
3. Prueba por argumentación directa.
4. Prueba condicional.

5. Prueba por reducción al absurdo.

Para explicar cada uno de los métodos considere un argumento general descrito en (4.1):

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$$

4.3.1 Prueba por tablas de verdad

El procedimiento que debe seguirse en ese tipo de prueba, es el usado en el ejemplo (4.1) usando tablas de verdad. Más específicamente se construye la tabla de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$ y si se verifica que esta proposición es una tautología, entonces se puede decir que $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \Rightarrow q$.

Ejemplo 4.3 *Demuestre la validez del siguiente razonamiento usando tablas de verdad*

$$\begin{array}{l} q \rightarrow r \\ p \\ \underline{p \rightarrow q} \\ \therefore r \end{array}$$

Para demostrar la validez del argumento dado, se debe construir la tabla de verdad de $(q \rightarrow r) \wedge p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow r$ y si esta proposición es una tautología, entonces $(q \rightarrow r) \wedge p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow r$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow q$	$(q \rightarrow r) \wedge p \wedge (p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r) \wedge p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow r$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

Por la tabla de verdad se verifica que $(q \rightarrow r) \wedge p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow r$.

Observación: Es claro que este método resulta útil cuando el argumento al que se le desea probar la validez posee pocas proposiciones simples, pues como se recordará si el argumento está compuesto por n proposiciones simples la tabla de verdad debe poseer 2^n filas.

4.3.2 Prueba por equivalencias lógicas

El procedimiento que debe seguirse en ese tipo de prueba, es el usado en el ejemplo (4.1) usando equivalencias lógicas.

Recuerde que un argumento es válido si $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$ es una tautología, por lo tanto, si se logra simplificar esta proposición, usando las leyes de equivalencia lógica, hasta obtener que su valor de verdad es verdadero se estaría demostrado que $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$ es en efecto una tautología y por tanto el argumento es válido.

Ejemplo 4.4 *Demuestre que* $(s \rightarrow t) \wedge \neg t \Rightarrow \neg s$*, usando leyes de equivalencia lógica.*

El objetivo es simplificar la proposición $(s \rightarrow t) \wedge \neg t \rightarrow \neg s$ *hasta lograr establecer que su valor de verdad es verdadero.*

$(s \rightarrow t) \wedge \neg t \rightarrow \neg s$	***Justificación***
$\equiv (\neg s \vee t) \wedge \neg t \rightarrow \neg s$	*Equiv. para la implicación*
$\equiv (\neg s \wedge \neg t) \vee (t \wedge \neg t) \rightarrow \neg s$	*Ley distributiva para* $\wedge$
$\equiv (\neg s \wedge \neg t) \vee F \rightarrow \neg s$	*Ley de contradicción*
$\equiv (\neg s \wedge \neg t) \rightarrow \neg s$	*Ley de dominación para* $\vee$
$\equiv \neg(\neg s \wedge \neg t) \vee \neg s$	*Equiv. para la implicación*
$\equiv (\neg(\neg s) \vee \neg(\neg t)) \vee \neg s$	*Ley de De Morgan para* $\wedge$
$\equiv (s \vee t) \vee \neg s$	*Doble negación*
$\equiv (t \vee s) \vee \neg s$	*Ley conmutativa para* $\vee$
$\equiv t \vee (s \vee \neg s)$	*Ley asociativa para* $\vee$
$\equiv t \vee V$	*Ley de medio excluido*
$\equiv V$	*Ley de dominación para* $\vee$

Hemos demostrado que $(s \rightarrow t) \wedge \neg t \rightarrow \neg s \equiv V$*, lo cual quiere decir que hemos comprobado que* $(s \rightarrow t) \wedge \neg t \rightarrow \neg s$ *es una tautología, por lo tanto* $(s \rightarrow t) \wedge \neg t \Rightarrow \neg s$.

4.3.3 Prueba por argumentación directa

En este tipo de prueba, se aplican de manera sucesiva leyes de equivalencia y/o reglas de inferencia lógica sobre el conjunto de premisas y sobre las nuevas proposiciones obtenidas por la aplicación de dichas leyes y/o reglas, con el objetivo de obtener a la proposición q, es decir, a la conclusión del argumento. La aplicación de las leyes y/o reglas garantiza que cada nueva proposición es consecuencia lógica de las premisas, y cuando finalmente se obtiene a la conclusión, está también será consecuencia lógica de las premisas y por tanto el argumento (4.1) será válido.

Es importante resaltar, que en esta guía cuando realizamos una prueba por argumentación directa, se asumen premisas verdaderas, es decir, $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$ son todas proposiciones verdaderas. En este contexto, si por la aplicación de reglas de inferencia y/o leyes de equivalencias se logra obtener a la conclusión del argumento, esta conclusión posee valor de verdad verdadero.

Ejemplo 4.5 *Demuestre la validez del siguiente razonamiento por argumentación directa*

$$\begin{array}{l} p \to (\neg s \to q) \\ \neg(r \to s) \\ \underline{r \to p \qquad\qquad} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

Antes de comenzar la prueba, elaboraremos un análisis de la prueba que nos permita descubrir que leyes y/o reglas se deben aplicar para obtener la conclusión del argumento. Cabe resaltar que el análisis que se presenta a continuación, es sólo una forma de estructurar la prueba, es decir, existen otras formas de análisis e incluso el lector puede idear alguna otra que le parezca más adecuada.

Objetivo: *Hallar $p \wedge q$*

1. *Cómo hallar $p \wedge q$?*
   Al hallar p y q se obtiene que
   $p, q \Rightarrow p \wedge q$ *Ley de conjunción*

2. *Cómo hallar p?*
   Al hallar r y usando la tercera premisa se obtiene que
   $r \wedge (r \to p) \Rightarrow p$ *Modus ponendo ponens*

3. *Cómo hallar r?*
   De la segunda premisa se tiene que $\neg(r \to s)$
   $\equiv \neg(\neg r \vee s)$ *Equiv. para la implicación*
   $\equiv \neg(\neg r) \wedge \neg s$ *Ley de De Morgan para* $\vee$
   $\equiv r \wedge \neg s$ *Doble negación*
   Usando esta última proposición equivalente a la segunda premisa, se obtiene que
   $r \wedge \neg s \Rightarrow r$ *Ley de simplificación*

4. *Cómo hallar q?*
   De la primera premisa se tiene que $p \to (\neg s \to q)$
   $\equiv p \wedge \neg s \to q$ *Ley de Exportación/Importación*
   Al hallar $p \wedge \neg s$ y usando esta última proposición equivalente a la primera premisa, se obtiene que
   $(p \wedge \neg s) \wedge (p \wedge \neg s \to q) \Rightarrow q$ *Modus ponendo ponens*

5. *Cómo hallar p?*
   PASO 1.

6. *Cómo hallar* $\neg s$
   Del paso tres, se sabe que $\neg(r \to s) \equiv r \wedge \neg s$*, de donde se obtiene que*
   $r \wedge \neg s \Rightarrow \neg s$ *Ley de simplificación*

La prueba formal de validez se reduce a colocar de manera ordenada cada uno de los pasos descritos en el análisis.

Paso		***Justificación***
1)	$p \to (\neg s \to q)$	*Premisa 1*
2)	$\neg(r \to s)$	*Premisa 2*
3)	$r \to p$	*Premisa 3*
4)	$\neg(\neg r \vee s)$	*Equiv. para la implicación en 2)*
5)	$\neg(\neg r) \wedge \neg s$	*Ley de De Morgan para $\vee$ en 4)*
6)	$r \wedge \neg s$	*Doble negación en 5)*
7)	r	*Ley de simplificación en 6)*
8)	$r \wedge (r \to p)$	*Ley de conjunción entre 7) y 3)*
9)	p	*Modus ponendo ponens en 8)*
10)	$p \wedge \neg s \to q$	*Ley de Exportación/Importación en 1)*
11)	$\neg s$	*Ley de simplificación en 6)*

12)	$p \wedge \neg s$	*Ley de conjunción entre 9) y 11)*
13)	$(p \wedge \neg s) \wedge (p \wedge \neg s \rightarrow q)$	*Ley de conjunción entre 12) y 10)*
14)	q	*Modus ponendo ponens en 13)*
15)	$p \wedge q$	*Ley de conjunción entre 9) y 14)*

Observación: Comentarios de interés:

1. Note que en cada paso del análisis, se tiene un nuevo argumento, donde la conclusión de dicho argumento es una proposición que nos permitirá, por la aplicación de alguna ley y/o regla, la obtención de la conclusión del argumento inicial.

2. Cada paso de la demostración debe enumerarse para que, al aplicar una ley y/o regla, se pueda indicar en que paso de la demostración se encuentra la proposición a la que se le está aplicando la ley y/o regla.

3. Una vez que se listan todas las premisas, y que se aplica una ley de equivalencia o regla de inferencia se debe colocar en la columna **"Justificación"** el nombre de la ley o regla usada y a cual(es) paso(s) fue aplicada. Esto permite entender cómo se genera cada nueva proposición.

4.3.4 Prueba condicional

Este tipo de prueba se aplica cuando la conclusión es una proposición condicional [5]. Más específicamente, suponga que se quiere probar la validez del siguiente argumento para el cual asumiremos todas sus premisas verdaderas.

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow (q \rightarrow s) \tag{4.2}$$

Note que si la proposición q es falsa entonces $q \rightarrow s$ es verdadero, independientemente del valor de verdad de s, y en este caso se tendría que (4.2) es válido:

$$\underbrace{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n}_{verdad} \rightarrow \underbrace{(q \rightarrow s)}_{verdad} \tag{4.3}$$

Para el caso en que q es verdadera y s es falsa el argumento es inválido:

$$\underbrace{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n}_{verdad} \rightarrow \underbrace{(\overbrace{q}^{verdad} \rightarrow \overbrace{s}^{falso})}_{falso} \tag{4.4}$$

[5] Más adelante veremos que también se puede usar, cuando en algún paso de la prueba formal se desea obtener una proposición condicional

Por otro lado, si q es verdadera y s es verdadera el argumento es válido:

$$\underbrace{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n}_{verdad} \rightarrow \underbrace{(\overbrace{q}^{verdad} \rightarrow \overbrace{s}^{verdad})}_{verdad} \tag{4.5}$$

Al asumir q como una proposición verdadera, todas las premisas del siguiente argumento son verdaderas.

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge q \rightarrow s \tag{4.6}$$

Si se logra probar que $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge q \Rightarrow s$ (argumento válido) se está garantizando que s es verdadera lo que implica que la proposición condicional $q \rightarrow s$ es también verdadera y esto aseguraría que (4.2) es válido.

Resumiendo, para probar la validez (invalidez) de (4.2), se asume a la proposición q como verdadera y se coloca como una nueva premisa para construir al argumento (4.6).

1. Si (4.6) resulta inválido, por las razones que se explican para (4.4), se tiene que (4.2) es también inválido.
2. Si (4.6) resulta válido, por las razones que se explican para (4.5), se tiene que (4.2) es también válido.

Ejemplo 4.6 *Demuestre la validez del siguiente razonamiento por prueba condicional*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \vee r \\ \neg q \\ \neg p \rightarrow s \\ \hline \therefore \neg r \rightarrow (\neg p \wedge s) \end{array}$$

Antes de comenzar la prueba, elaboraremos un análisis de la prueba que nos permita descubrir que leyes y/o reglas se deben aplicar para obtener la conclusión del argumento.

Objetivo: $\neg r \rightarrow (\neg p \wedge s)$.
En vista que se va a usar la prueba condicional, se asume a $\neg r$ *como una nueva premisa, llamada premisa condicional, y ahora el objetivo es hallar* $\neg p \wedge s$

1. *Cómo hallar* $\neg p \wedge s$*?*
   Al hallar $\neg p$ *y* s *se obtiene que*
   $\neg p, s \Rightarrow \neg p \wedge s$ *Ley de conjunción*

2. *Cómo hallar* $\neg p$*?*
   Al hallar $\neg(q \vee r)$ *y usando la primera premisa se obtiene que*
   $\neg(q \vee r) \wedge (p \to q \vee r) \Rightarrow \neg p$ *Modus tollendo tollens*

3. *Cómo hallar* $\neg(q \vee r)$*?*
   $\neg(q \vee r) \equiv \neg q \wedge \neg r$ *Ley de De Morgan para* $\vee$
   Al hallar $\neg q$ *y* $\neg r$ *so obtiene que*
   $\neg q, \neg r \Rightarrow \neg q \wedge \neg r$ *Ley de conjunción*

4. *Cómo hallar* $\neg q$*?*
   Segunda premisa.

5. *Cómo hallar* $\neg r$*?*
   Premisa condicional.

6. *Cómo hallar* s*?*
   Al hallar $\neg p$ *y con la tercera premisa se obtiene que*
   $\neg p \wedge (\neg p \to s) \Rightarrow s$ *Modus ponendo ponens*

7. *Cómo hallar* $\neg p$*?*
   PASO 2

La prueba formal de validez se reduce a colocar de manera ordenada cada uno de los pasos descritos en el análisis.

Paso		***Justificación***
1)	$p \to q \vee r$	*Premisa 1*
2)	$\neg q$	*Premisa 2*
3)	$\neg p \to s$	*Premisa 3*
4)	$\neg r$	*Premisa condicional*
5)	$\neg q \wedge \neg r$	*Ley de conjunción entre 2) y 4)*
6)	$\neg(q \vee r)$	*Ley de De Morgan para* $\vee$ *en 5)*
7)	$\neg(q \vee r) \wedge (p \to q \vee r)$	*Ley de conjunción entre 6) y 1)*
8)	$\neg p$	*Modus tollendo tollens en 7)*
9)	$\neg p \wedge (\neg p \to s)$	*Ley de conjunción entre 8) y 3)*

10)	s	*Modus ponendo ponens en 9)*
11)	$\neg p \wedge s$	*Ley de conjunción entre 8) y 10)*
12)	$\neg r \rightarrow \neg p \wedge s$	*Prueba condicional*

Observación: *Note que en el paso 11 se obtuvo la proposición $\neg p \wedge s$, pero en vista que estábamos realizando una prueba condicional, debemos colocar en el paso final de la demostración a la conclusión del argumento inicial y justificamos este paso acotando que estábamos realizando una prueba condicional.*

Al principio de esta sección, se comentó que la prueba condicional no necesariamente es de uso exclusivo para argumentos cuya conclusión es una proposición condicional. En los análisis que hemos realizado antes de escribir la prueba formal de validez, se puede observar que cada paso del análisis constituye un nuevo argumento cuya conclusión es un resultado parcial que finalmente nos permitirá hallar la conclusión del argumento inicial. Ahora bien, si en alguno de estos pasos intermedios se requiere de una proposición condicional para seguir avanzando en la prueba principal, es factible aplicar una prueba condicional para obtener ese resultado parcial. Con un ejemplo explicaremos mejor este punto:

Ejemplo 4.7 *Demuestre la validez del siguiente razonamiento*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \wedge q \rightarrow r \vee s \\ r \vee s \rightarrow \neg t \\ (p \rightarrow \neg t) \rightarrow u \\ \hline \therefore u \end{array}$$

Antes de comenzar la prueba, elaboraremos un análisis de la prueba que nos permita descubrir que leyes y/o reglas se deben aplicar para obtener la conclusión del argumento.

Objetivo: u

1. *Cómo hallar u?*
   Al hallar $p \rightarrow \neg t$ y usando la tercera premisa se obtiene que
   $(p \rightarrow \neg t) \wedge ((p \rightarrow \neg t) \rightarrow u) \Rightarrow u$ *Modus ponendo ponens*

2. *Cómo hallar* $p \to \neg t$*?*
   Observe que la conclusión que se desea obtener es una proposición condicional. En este punto, se puede hacer una prueba condicional y asumir al antecedente del condicional como verdadero (p) y el objetivo es obtener el consecuente $(\neg t)$*.*
   Se asume p verdadero, por prueba condicional y se trata de hallar $\neg t$*.*

3. *Cómo hallar* $\neg t$*?*
   Usando la segunda y la tercera premisa se obtiene que:
   $(p \wedge q \to r \vee s) \wedge (r \vee s \to \neg t) \Rightarrow (p \wedge q \to \neg t)$ *Silogismo hipotético*
   Al hallar $p \wedge q$ *y usando esta nueva proposición se obtiene que:*
   $(p \wedge q) \wedge (p \wedge q \to \neg t) \Rightarrow \neg t$ *Modus ponendo ponens*

4. *Cómo hallar* $p \wedge q$*?*
   Al hallar p y q se obtiene que
   $p, q \Rightarrow p \wedge q$ *Ley de conjunción*

5. *Cómo hallar q?*
   Al hallar p y usando la primera premisa se obtiene que:
   $p \wedge (p \to q) \Rightarrow p$ *Modus ponendo ponens*

6. *Cómo hallar p?*
   PASO 2. (Premisa condicional).

La prueba formal de validez se reduce a colocar de manera ordenada cada uno de los pasos descritos en el análisis.

Paso	***Justificación***
1) $p \to q$	*Premisa 1*
2) $p \wedge q \to r \vee s$	*Premisa 2*
3) $r \vee s \to \neg t$	*Premisa 3*
4) $(p \to \neg t) \to u$	*Premisa 4*
5) $(p \wedge q \to r \vee s) \wedge (r \vee s \to \neg t)$	*Ley de conjunción entre 2) y 3)*
6) $p \wedge q \to \neg t$	*Silogismo hipotético en 5)*
7) p	*Premisa condicional*
8) $p \wedge (p \to q)$	*Ley de conjunción entre 7) y 1)*
9) q	*Modus ponendo ponens en 8)*
10) $p \wedge q$	*Ley de conjunción entre 7) y 9)*
11) $(p \wedge q) \wedge (p \wedge q \to \neg t)$	*Ley de conjunción entre 10) y 6)*

12) $\neg t$	*Modus ponendo ponens en 11)*
13) $p \rightarrow \neg t$	*Prueba condicional*
14) $(p \rightarrow \neg t) \wedge ((p \rightarrow \neg t) \rightarrow u)$	*Ley de conjunción entre 13) y 4)*
15) u	*Modus ponendo ponens en 14)*

Observación: *La conclusión del argumento inicial no es un condicional, sin embargo para poder obtenerla se requiere de $p \rightarrow \neg t$ y para poder obtener este proposición se realizó una prueba condicional.*

4.3.5 Prueba por reducción al absurdo

Este prueba consiste en probar la validez del argumento (4.1),

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$$

asumiendo el negado de la conclusión como una nueva premisa y derivando de este nuevo conjunto de premisas una contradicción.

Para entender mejor el procedimiento, en primer lugar recuerde que todas las premisas (4.1) desde p_1 hasta p_n se asumen verdaderas y en segundo lugar considere el siguiente argumento:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg q \rightarrow c \tag{4.7}$$

donde c es una contradicción, es decir, $c \equiv falso$.

Si se logra establecer que (4.7) es un argumento válido, necesariamente el antecedente de (4.7) debe falso, ya que el consecuente es falso (si el antecedente fuese verdadero, el argumento sería inválido), es decir:

$$\underbrace{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg q}_{falso} \Rightarrow \underbrace{c}_{falso}$$

Ahora bien, dado que $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n$ es una proposición verdadera, para que el antecedente sea falso, tiene que ocurrir que $\neg q$ es falsa y por tanto q es verdadera. Finalmente al concluir que q es una proposición verdadera, se puede también concluir que el argumento (4.1) es válido.

Ejemplo 4.8 *Demuestre la validez del siguiente razonamiento por reducción al absurdo*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \vee \neg q \\ \neg(p \wedge r) \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Antes de comenzar la prueba, elaboraremos un análisis de la prueba que nos permita descubrir que leyes y/o reglas se deben aplicar para obtener la conclusión del argumento.

Objetivo: $\neg p$
En vista de que se va a usar prueba por reducción al absurdo, se niega la conclusión y se asume como una nueva premisa $\neg(\neg p) \equiv p$. *El objetivo ahora es derivar una contradicción de las premisas dada. Una proposición de la forma* $r \wedge \neg r$ *es una contradicción, por tanto supongamos que esta proposición es el nuevo objetivo.*

1. *Cómo hallar* $r \wedge \neg r$*?*
   Al hallar r *y* $\neg r$ *se obtiene que*
   $r, \neg r \Rightarrow r \wedge \neg r$ *Ley de conjunción*

2. *Cómo hallar* r*?*
   Al hallar q *y usando la segunda premisa se obtiene que:*
   $(r \vee \neg q) \wedge q \Rightarrow r$ *Silogismo disyuntivo*

3. *Cómo hallar* q*?*
   Al hallar p *y usando la primera premisa se obtiene que:*
   $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$ *Modus ponendo ponens*

4. *Cómo hallar* p*?*
   Premisa por reducción al absurdo.

5. *Cómo hallar* $\neg r$*?*
   De la tercera premisa se tiene que:
   $\neg(p \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg r$ *Ley de De Morgan para* $\wedge$
   Al hallar p *y usando esta la proposición equivalente a la tercera premisa se obtiene que:*
   $(\neg p \vee \neg r) \wedge p \Rightarrow \neg r$ *Silogismo disyuntivo*

La prueba formal de validez se reduce a colocar de manera ordenada cada uno de los pasos descritos en el análisis.

Paso	***Justificación***
1) $p \to q$	*Premisa 1*
2) $r \vee \neg q$	*Premisa 2*
3) $\neg(p \wedge r)$	*Premisa 3*
4) p	*Premisa 4 (Negación de la conclusión)*
5) $p \wedge (p \to q)$	*Ley de conjunción entre 4) y 1)*
6) q	*Modus ponendo ponens en 5)*
7) $(r \vee \neg q) \wedge q$	*Ley de conjunción entre 2) y 6)*
8) r	*Silogismo disyuntivo en 7)*
9) $\neg p \vee \neg r$	*Ley de De Morgan para* $\wedge$ *en 3)*
10) $(\neg p \vee \neg r) \wedge p$	*Ley de conjunción entre 9) y 4)*
11) $\neg r$	*Silogismo disyuntivo en 10)*
12) $r \wedge \neg r$	*Ley de conjunción entre 8) y 11) CONTRADICCION*
13) $\neg p$	*Prueba por reducción al absurdo*

4.4 Consistencia e inconsistencia de premisas

Suponga que las siguientes proposiciones son premisas de un cierto argumento:

1. Juan dijo que el día del crimen, él estaba en Caracas.

2. María dijo que estuvo con Juan en Mérida el día del Crimen.

Es claro que estas declaraciones no son *consistentes*, es decir, no pueden ser verdad ambas al mismo tiempo. Este ejemplo nos permite dar una definición de inconsistencia.

Definición 4.4 *Un conjunto de premisas* $p_1, p_2, p_3 \cdots, p_n$ *es inconsistente si dichas premisas implican lógicamente una contradicción, es decir, si* $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \Rightarrow c$ *donde* c *es una contradicción.*

Observación: Si se logra establecer que $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \Rightarrow c$ siendo c una contradicción, se está asegurando que no todas las premisas pueden ser verdad al mismo tiempo, es decir, al menos una de las premisas debe ser falsa, pues no puede ocurrir que $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n$ sea una proposición verdadera.

Obviamente un conjunto de premisas $p_1, p_2, p_3 \cdots, p_n$ es consistente cuando no son inconsistentes. Es decir, si se logra establecer al menos una combinación de valores de verdad de las proposiciones simples que conforman a las premisas, tal que dicha combinación logre que TODAS las premisas sean verdaderas al mismo tiempo, entonces se asegura que el conjunto de premisas es consistente.

Ejemplo 4.9 *Demuestre que el siguiente conjunto de premisas es consistente:*

$$P_1 : p \to q$$
$$P_2 : q \to r$$
$$P_3 : \neg p \wedge r$$

P_1, P_2 y P_3 serán consistentes si se logran encontrar al menos una combinación de valores de verdad de p, q y r tal que P_1, P_2 y P_3 sean TODAS verdaderas.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$\neg p \wedge r$
F	V	V	V	V	V

De la tabla anterior se puede concluir que el conjunto de premisas en consistente.

Ejemplo 4.10 *Demuestre que el siguiente conjunto de premisas es inconsistente*

$$P_1 : p \to q$$
$$P_2 : q \to r$$
$$P_3 : s \to \neg r$$
$$P_4 : p \wedge s$$

En este caso trataremos de derivar una contradicción del conjunto de premisas:

Paso	***Justificación***
1) $p \to q$	*Premisa 1*
2) $q \to r$	*Premisa 2*
3) $s \to \neg r$	*Premisa 3*
4) $p \wedge s$	*Premisa 4*
5) s	*Ley de simplificación en 4)*
6) $s \wedge (s \to \neg r)$	*Ley de conjunción entre 5) y 3)*
7) $\neg r$	*Modus ponendo ponens en 6)*
8) $(p \to q) \wedge (q \to r)$	*Ley de conjunción entre 1) y 2)*

9) $p \to r$	*Silogismo disyuntivo en 8)*
10) p	*Ley de simplificación en 4)*
11) $p \wedge (p \to r)$	*Ley de conjunción entre 8) y 9)*
12) r	*Modus ponendo ponens en 11)*
13) $r \wedge \neg r$	*Ley de conjunción entre 12) y 7) CONTRADICCIÓN.*

Se demostró que $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \Rightarrow r \wedge \neg r$ *por tanto el conjunto de premisas es inconsistente.*

Observación: Considere el siguiente argumento $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \to q$

1. Si las premisas son inconsistentes, el argumento es válido, pues al menos una de las premisas es falsa, con lo cual el argumento considerado tendrá el antecedente falso.

2. Si las premisas son consistentes, no se puede decir nada acerca de la validez del argumento, ya que pueden ocurrir los dos casos: premisas consistentes y el argumento válido, y premisas consistentes y argumento inválido.

Capítulo 5

Lógica de predicados

En nuestro lenguaje natural existen afirmaciones que no pueden ser simbolizadas usando la lógica proposicional. Por ejemplo:

1. "El número $x+1$ es un entero par".
   Observe que esta frase ni siquiera es una proposición, pues no posee un valor de verdad, sin embargo, cuando x toma un valor particular se obtiene una proposición. Así si $x=2$, se tiene la oración "El número 3 es un entero par" que es una proposición falsa. Mientras que si $x=3$ se obtiene la oración "El número 4 es un entero par" que es una proposición verdadera.

También cabe señalar, que no todo argumento puede ser estudiado desde el punto de vista de la lógica proposicional. Para explicar mejor este punto, considere el siguiente razonamiento:

$$\begin{array}{l} \text{Todos los hombres son mortales.} \\ \text{Todos los griegos son hombres.} \\ \hline \therefore \text{Todos los griegos son mortales.} \end{array}$$

Es claro, siguiendo nuestro sentido común [1], que este es un argumento válido, sin embargo si empleásemos la lógica proposicional para formalizarlo nos quedaría el siguiente argumento:

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore r \end{array}$$

[1] Que es el menos común de los sentidos

que a todas luces es un argumento inválido.

En vista de estas limitaciones de la lógica proposicional, nos vemos en la necesidad de introducir los elementos de la lógica de predicados, que permiten el estudio de argumentos como el anteriormente descrito.

5.1 Predicados

La lógica de predicados contiene todos los elementos de la lógica proposicional. Además de estos elementos, incluye nuevos conceptos tales como, *términos, variables, predicados y cuantificadores*, que se examinaran en detalle en esta sección. De nuestro lenguaje natural sabemos que una oración se compone de dos elementos fundamentales: sujeto y predicado.[2] El la lógica de predicados el *término* viene a ser el sujeto de la oración, mientras que el predicado tiene el mismo significado tanto en el lenguaje natural como en la lógica de predicados: el predicado es la información que se da sobre el sujeto. En la lógica de predicados se usan a los *cuantificadores* para indicar si una frase siempre es verdadera (o siempre es falsa), o si es por el contrario es verdadera en algunas ocasiones (o falsa en algunas ocasiones).

Nuestro ejemplo inicial, nos permitirá identificar algunos de los nuevos elementos de la lógica de predicados.

"El número $x + 1$ es un entero par".

Anteriormente se comento que esta oración NO es una proposición, pero cuando x toma un valor particular obtenemos una proposición que posee un valor de verdad fijo, por ejemplo para $x = 4$ se obtiene una proposición falsa. La oración "El número $x + 1$ es un entero par" recibe el nombre de *proposición abierta o predicado*[3], x recibe en nombre de *variable*, cuando x toma el valor de 4 este valor recibe el nombre de *constante*.

Cabe señalar, que en nuestra proposición abierta, la variable x no puede tomar cualquier valor, por ejemplo, si tomamos $x = Juan$ obtenemos la oración: "El número $Juan + 1$ es un entero par" que carece de todo sentido. De aquí concluimos que x sólo puede tomar valores permisibles. En este punto estamos en capacidad de definir ciertos elementos de la lógica de predicados de manera formal.

[2]Es este caso consideramos al verbo como parte del predicado.

[3]Utilizaremos de manera indistinta a ambos términos.

Definición 5.1 *Una oración es una proposición abierta si:*

1. *Contiene una o más variables.*

2. *No es una proposición, pero*

3. *Se transforma en proposición cuando la variables que aparecen en ella se reemplaza por ciertas opciones permitidas.*

Definición 5.2 *El conjunto de todas las opciones válidas para una proposición abierta dada se denomina Universo del Discurso, denotaremos a este conjunto con la letra U.*

Observación: Los predicados se denotan por una letra mayúscula, las variables involucradas en dicho predicado se colocan entre paréntesis. Para clarificar esta notación considere los siguientes ejemplos:

1. Considere $U = \mathbb{Z}$.
   $P(x)$: El número $x + 1$ es un entero par.

   - $P(2)$ es una proposición falsa.
   - $P(3)$ es una proposición verdadera.

2. Considere $U = \mathbb{Z}$.
   $R(x, y)$: El entero $x + y = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

   - $R(2, 3)$: El entero $2 + 3 = 6 = 2k$ con $k = 2$, $k \in \mathbb{Z}$, es una proposición verdadera.
   - $R(11, 3)$: El entero $11 + 3 = 33 \neq 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, es una proposición falsa, pues no existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $33 = 2k$.

3. Sea $U = \mathbb{Z}$.
   $S(x, y, z)$: $x + y = z$

   - $S(3, 4, 10)$, es una proposición falsa, pues $3 + 4 \neq 10$.
   - $S(3, 5, 8)$, es una proposición verdadera, pues $3 + 5 = 8$.

5.2 Cuantificadores

Consideremos las siguientes oraciones:

1. "Todos los seres humanos son mortales".
2. "Algunas personas son egoístas".

Si consideramos a $U = \{\text{seres humanos}\}$, podemos dar una primera aproximación a la simbolización correcta de dichas frases, usando los siguientes predicados:
$M(x)$: x es mortal.
$E(x)$: x es egoísta.

- "Todos los seres humanos son mortales". Se simbolizaría por:
  Para todo x en U, $M(x)$
- "Algunas personas son egoístas". Se simbolizaría por:
  Existe al menos un x en U, $E(x)$

Las frases, "Para todo x" y "Existe al menos un x" *cuantifican* a los predicados $M(x)$ y $E(x)$ respectivamente. El predicado $M(x)$ está cuantificado *universalmente* mientras que $E(x)$ está cuantificado *existencialmente*.

5.2.1 Cuantificador universal

En la oración (1) se emplea el *cuantificador universal*, que denotaremos con el símbolo "$\forall$" y se lee con alguna de las siguientes frases: "Para todo", "Para cada", 'Para cualquier." Finalmente la oración (1) se simboliza como:

$$\forall x \in U : M(x) \tag{5.1}$$

y se lee como, "Para todo [4] x perteneciente al universo del discurso, se tiene que $M(x)$".

La expresión (5.1) recibe el nombre de proposición cuantificada universalmente. Al igual que en la lógica proposicional, se tiene que una proposición cuantificada universalmente o bien es verdadera o bien falsa, pero no ambas a la vez. A continuación explicaremos como establecer el valor de verdad de una proposición cuantificada universalmente.

[4] "Para cada", "Para cualquier"

Definición 5.3 *Sean $U = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ el universo del discurso y sea $R(x)$ una proposición abierta. Se tiene que*

$$\forall x \in U : R(x) \equiv R(x_1) \wedge R(x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_n).$$

Así $\forall x \in U : R(x)$ será una proposición cuantificada verdadera cuando $R(x_1) \wedge R(x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_n)$ sea una proposición verdadera. En caso contrario, la proposición cuantificada $\forall x \in U : R(x)$ es falsa.

Observación:

- $R(x)$ NO es una proposición, pues no se puede determinar cual es su valor de verdad. $R(x)$ es una proposición abierta.
- Cuando reemplazamos x por una opción válida, es decir cuando la variable x toma un valor del universo del discurso, se obtiene una proposición.
- $R(x_1) \wedge R(x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_n)$ es una proposición lógica, pues cada $R(x_i)$ con $i = 1, 2, \cdots, n$ son proposiciones lógicas.
- $R(x_1) \wedge R(x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_n)$ es verdadera cuando TODAS Y CADA UNA de las proposiciones $R(x_i)$ con $i = 1, 2, \cdots n$ son verdaderas y es falsa cuando AL MENOS una de las proposiciones $R(x_i)$ es falsa.

5.2.2 Cuantificador existencial

En la oración (2) se emplea el *cuantificador existencial*, que denotaremos con el símbolo "$\exists$" y se lee con alguna de las siguientes frases: "Existe al menos un", "Para algún". Por lo tanto, "$\exists x$" se leerá: "Existe al menos un x", "Para algún x". Finalmente la oración (2) se simboliza como:

$$\exists x \in U : E(x) \tag{5.2}$$

la expresión (5.2) recibe el nombre de proposición cuantificada existencialmente. Al igual que en la lógica proposicional, se tiene que una proposición cuantificada existencialmente o bien es verdadera o bien falsa, pero no ambas a la vez. A continuación explicaremos como establecer el valor de verdad de una proposición cuantificada existencialmente.

Definición 5.4 *Sean $U = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ el universo del discurso y sea $R(x)$ una proposición abierta. Se tiene que*

$$\exists x \in U : R(x) \equiv R(x_1) \vee R(x_2) \vee \cdots \vee R(x_n).$$

Así $\exists x \in U : R(x)$ será una proposición cuantificada verdadera cuando $R(x_1) \vee R(x_2) \vee \cdots \vee R(x_n)$ sea una proposición verdadera. En caso contrario, la proposición cuantificada $\exists x \in U : R(x)$ es falsa.

Observación:

- $R(x_1) \vee R(x_2) \vee \cdots \vee R(x_n)$ es una proposición lógica, pues cada $R(x_i)$ con $i = 1, 2, \cdots, n$ son proposiciones lógicas.
- $R(x_1) \vee R(x_2) \vee \cdots \vee R(x_n)$ es falsa cuando TODAS Y CADA UNA de las proposiciones $R(x_i)$ con $i = 1, 2, \cdots n$ SON falsas y es verdadera cuando AL MENOS una de las proposiciones $R(x_i)$ es verdadera.

A continuación colocamos algunos ejemplos de proposiciones cuantificadas universal y existencialmente, para determinar cuando son verdaderas y cuando son falsas.

Ejemplo 5.1 *Sea $U = \mathbb{Z}$. Considere las siguientes proposiciones abiertas*
$P(x) : x \geq 0$.
$Q(x) : x^2 \geq 0$.
Determine el valor de las siguientes proposiciones cuantificadas.

- $\forall x \in U : P(x) \wedge Q(x)$
  Esta es una proposición cuantificada universalmente con valor de verdad falso, pues para $x = -3$ se obtiene que $P(-3)$ es falsa y $Q(-3)$ es verdadera, por lo que $P(-3) \wedge Q(-3)$ es falsa. Con estos hemos demostrado que no todos los enteros satisfacen que $P(x) \wedge Q(x)$.
- $\exists x \in U : P(x) \wedge Q(x)$
  Esta es una proposición cuantificada existencialmente con valor de verdad verdadero, pues para $x = 2$ se obtiene que $P(2)$ es verdadera y $Q(2)$ es verdadera, por lo que $P(2) \wedge Q(2)$ es verdadera. Con esto hemos demostrado que existe al menos un entero que logra que $P(x) \wedge Q(x)$ sea una proposición verdadera.

- $\forall x \in U : P(x) \to Q(x)$
  Esta es una proposición cuantificada universalmente con valor de verdad verdadero. Cuando x es negativo, $P(x)$ es falsa y por tanto $P(x) \to Q(x)$ es una proposición verdadera, independientemente del valor de verdad que tome $Q(x)$ para los enteros negativos. Por otro lado, si x es positivo, tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son verdaderas, por lo cual $P(x) \to Q(x)$ es una proposición verdadera. Con esto hemos comprobado que todo entero logra que $P(x) \to Q(x)$ sea verdadera.

Ya para finalizar este tema relacionado con los valores de verdad de una proposición cuantificada, colocamos el siguiente cuadro resumen:

Proposición	¿Cuándo es verdadera?	¿Cuándo es falsa?
$\forall x \in U : P(x)$	Cuando para cada $a \in U$ se obtiene que $P(a)$ es verdadera	Cuando existe al menos un $a \in U$ tal que $P(a)$ es falsa
$\exists x \in U : P(x)$	Cuando existe al menos un $a \in U$ tal que $P(a)$ es verdadera	Cuando para cada $a \in U$ se obtiene que $P(a)$ es falsa

Tabla 5.1: Valores de verdad de una proposición cuantificada.

En la lógica de predicados, al igual que en la lógica proposicional, siempre es posible negar una proposición. A continuación discutiremos sobre cómo negar una proposición cuantificada. Sea $U = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ y recuerde que:

$$\begin{aligned}\forall x \in U : P(x) &\equiv P(x_1) \wedge P(x_1) \wedge \cdots \wedge P(x_n)\\ \exists x \in U : P(x) &\equiv P(x_1) \vee P(x_1) \vee \cdots \vee P(x_n)\end{aligned}$$

1. Negación de una proposición cuantificada universalmente.

   $$\begin{aligned}\neg[\forall x \in U : P(x)] &\equiv \neg[P(x_1) \wedge P(x_1) \wedge \cdots \wedge P(x_n)]\\ &\equiv \neg P(x_1) \vee \neg P(x_1) \vee \cdots \vee \neg P(x_n)\\ &\equiv \exists x \in U : \neg P(x)\end{aligned}$$

   Por tanto $\neg[\forall x \in U : P(x)] \equiv \exists x \in U : \neg P(x)$.

2. Negación de una proposición cuantificada existencialmente.

   $$\begin{aligned}\neg[\exists x \in U : P(x)] &\equiv \neg[P(x_1) \vee P(x_1) \vee \cdots \vee P(x_n)]\\ &\equiv \neg P(x_1) \wedge \neg P(x_1) \wedge \cdots \vee \wedge P(x_n)\\ &\equiv \exists x \in U : \neg P(x)\end{aligned}$$

   Por tanto $\neg[\exists x \in U : P(x)] \equiv \forall x \in U : \neg P(x)$.

5.3 Simbolización

A continuación trataremos de establecer asociaciones entre oraciones de nuestro lenguaje natural con expresiones formalmente representadas en lógica de predicados. Esta asociación nos permitirá entender cómo usar los cuantificadores. Iniciaremos las discusión con cuatro oraciones y para ello considere a $U = \{\text{las personas}\}$ y a las siguientes proposiciones abiertas: $N(x) : x$ es Novato e $I(x) : x$ es inteligente.

Supongamos que el Universo, es decir, todas las personas las agrupamos en un cuadrado, y que dividimos al conjunto de las personas en inteligentes (I) y no inteligentes (¬I) y finalmente a las personas novatos la agrupamos en un círculo (N).

Con estos elementos explicaremos cómo simbolizar, usando lógica de predicados, ciertas frases de nuestro lenguaje natural.

1. "Todos los novatos son inteligentes".
   La siguiente figura nos da una idea de como simbolizar la frase usando lógica de predicados

   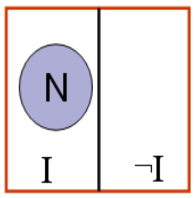

   Figura 5.1: Todos los novatos son inteligentes.

   La figura (5.1) permite interpretar la frase inicial con la siguiente oración: "Toda persona, si es un novato entonces es inteligente" y simbolizar esta frase es bastante sencillo:

   $$\forall x \in U : N(x) \to I(x).$$

2. "Algunos novatos no son inteligentes".
   La siguiente figura nos da una idea de como simbolizar la frase usando lógica de predicados La figura (5.2) permite interpretar la frase inicial con la siguiente oración: "Existen algunas personas que son novatos y no son inteligentes" y simbolizar esta frase es bastante sencillo:

   $$\exists x \in U : N(x) \land \neg I(x).$$

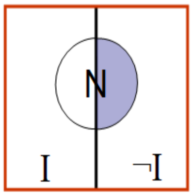

Figura 5.2: Algunos novatos no son inteligentes.

Observación: Note que la frase 2 es la negación de la frase 1 (y viceversa).

$$\begin{aligned}
\neg[\forall x \in U : N(x) \rightarrow I(x)] &\equiv \exists x \in U : \neg[N(x) \rightarrow I(x)] \\
&\equiv \exists x \in U : \neg[\neg N(x) \vee I(x)] \\
&\equiv \exists x \in U : \neg[\neg N(x)] \wedge \neg I(x) \\
&\equiv \exists x \in U : N(x) \wedge \neg I(x).
\end{aligned}$$

3. "Ningún novato es inteligente".
   La siguiente figura nos da una idea de como simbolizar la frase usando lógica de predicados

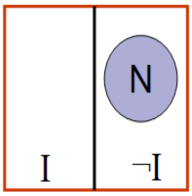

Figura 5.3: Ningún novato es inteligente.

La figura (5.3) permite interpretar la frase inicial con la siguiente oración: "Toda persona, si es un novato entonces es no es inteligente" y simbolizar esta frase es bastante sencillo:

$$\forall x \in U : N(x) \rightarrow \neg I(x).$$

4. "Algunos novatos son inteligentes".
   La siguiente figura nos da una idea de como simbolizar la frase usando lógica de predicados

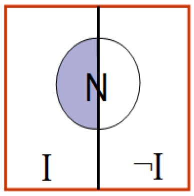

Figura 5.4: Algunos novatos son inteligentes.

La figura (5.4) permite interpretar la frase inicial con la siguiente oración: "Existen algunas personas que son novatos y son inteligentes" y simbolizar esta frase es bastante sencillo:

$$\exists x \in U : N(x) \wedge I(x).$$

Observación: Note que la frase 4 es la negación de la frase 3 (y viceversa).

$$\begin{aligned} \neg[\forall x \in U : N(x) \rightarrow \neg I(x)] &\equiv \exists x \in U : \neg[N(x) \rightarrow \neg I(x)] \\ &\equiv \exists x \in U : \neg[\neg N(x) \vee \neg I(x)] \\ &\equiv \exists x \in U : \neg[\neg N(x)] \wedge \neg[\neg I(x)] \\ &\equiv \exists x \in U : N(x) \wedge I(x) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2 *Simbolice las siguientes expresiones*

1. Ningún filósofo ha sido más sabio que los autores de la Constitución.
   $U = \{$las personas$\}$.
   $F(x)$: x es un filósofo.
   $S(x, y)$: x es más sabio que y.
   $C(x)$: x es autor de la Constitución.

$$\forall x \forall y : F(x) \wedge C(y) \rightarrow \neg S(x, y)$$

2. Algunas autoridades de la Universidad no tienen título de postgrado.
   $U = \{$las personas$\}$.

$D(x)$: x es autoridad de la Univesidad.
$P(x)$: x tiene título de postgrado.

$$\exists x : D(x) \wedge \neg P(x)$$

3. Todo instante ocurre después de algún instante.
   $U = \{\text{el tiempo}\}$.
   $I(x)$: x es un instante.
   $P(x, y)$: x ocurre después de y.

$$\forall x : \exists y : I(x) \wedge I(y) \wedge P(x, y)$$

5.4 Reglas de particularización y generalización

A continuación enunciaremos unas ciertas reglas que nos permitirán manejar a los cuantificadores con el objeto de poder realizar inferencia lógica en argumentos en lógica de predicados.

5.4.1 Reglas para el cuantificador universal

- **Particularización Universal (PU):** Esta regla establece que si $\forall x \in U : P(x)$ es una proposición verdadera, entonces $P(x)$ es verdadera para cualquier valor que tome la variable x en el universo del discurso.

- **Generalización Universal (GU):** Esta regla establece que si $P(x)$ es una proposición verdadera para cualquier elemento x del universo del discurso, entonces $\forall x \in U : P(x)$ es también una proposición verdadera.

5.4.2 Reglas para el cuantificador universal

- **Particularización Existencial (PE):** Esta regla establece que si $\exists x \in U : P(x)$ es una proposición verdadera, entonces existe al menos un elemento a del universo del discurso tal que $P(a)$ es verdadera.

- **Generalización Existencial (GE):** Esta regla establece que si existe al menos un elemento b del universo del discurso tal que $P(b)$ es una proposición verdadera, entonces $\exists x \in U : P(x)$ es también una proposición verdadera.

5.5 Equivalencias e implicaciones lógicas con cuantificadores

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ proposiciones abiertas, donde las variables x e y toman valores del Universo del discurso U. A continuación se listan algunas equivalencias e implicaciones lógicas que involucran cuantificadores:

1. $\forall x \in U : P(x) \equiv \neg\exists x \in U : \neg P(x)$
2. $\exists x \in U : P(x) \equiv \neg\forall x \in U : \neg P(x)$
3. $\forall x \in U : P(x) \wedge Q(x) \equiv \forall x \in U : P(x) \wedge \forall x \in U : Q(x)$
4. $\exists x \in U : P(x) \vee Q(x) \equiv \exists x \in U : P(x) \vee \exists x \in U : Q(x)$
5. $\neg\forall x \in U : P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \exists x \in U : P(x) \wedge \neg Q(x)$
6. $\neg\exists x \in U : P(x) \wedge Q(x) \equiv \forall x \in U : P(x) \rightarrow \neg Q(x)$
7. $\forall x \in U : P(x) \Rightarrow \exists x \in U : P(x)$
8. $\forall x \in U : P(x) \vee \forall x \in U : Q(x) \Rightarrow \forall x \in U : P(x) \vee Q(x)$
9. $\exists x \in U : P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow \exists x \in U : P(x) \wedge \exists x \in U : Q(x)$
10. $\forall x \in U : P(x) \rightarrow Q(x) \Rightarrow \forall x \in U : P(x) \rightarrow \exists x \in U : Q(x)$

5.6 Argumentación lógica

Como vimos al inicio de este capítulo existen razonamientos que no pueden ser analizados a la luz de la lógica proposicional y por ello nos vimos en la necesidad de introducir nuevos elementos que conforman a la lógica de predicados. En este nuevo contexto un argumento posee la misma estructura anteriormente descrita, es decir un argumento es una estructura con la forma

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$$

con la particularidad que tanto las premisas cómo la conclusión pueden ser proposiciones cuantificadas. A continuación estudiaremos como establecer cuando un argumento es válido.

5.6.1 Argumentos válidos

Como mencionamos anteriormente un argumento es válido cuando las premisas implican lógicamente a la conclusión, o lo que es lo mismo cuando la conclusión es consecuencia lógica de las premisas. Ahora bien, todos los métodos para probar la validez de una argumento anteriormente estudiados son aplicables a este tipo de razonamientos, aunque hay que tener en cuanto unas consideraciones adicionales que se discuten a continuación:

1. En primer lugar se debe simbolizar al argumento, es este paso se debe definir al universo del discurso y se deben identificar todas y cada una de la proposiciones abiertas necesarias para la simbolización del argumento.

2. Cuando sea necesario se deben eliminar, los cuantificadores universales y existenciales usando las reglas de particularización universal y existencial. Note que hacemos énfasis en la frase "Cuando se necesario" pues en ocasiones se puede establecer que las premisas implican lógicamente a la conclusión sólo usando las equivalencias e implicaciones lógicas que se estudiaron en la sección anterior. Observe que independiente de la regla de particularización usada, una vez que se eliminan los cuantificadores, se obtienen proposiciones en el sentido de la lógica proposicional.

3. Luego de aplicar el paso 2, se tienen un argumento con proposiciones, la validez de este razonamiento puede ser demostrada usando cualquiera de los métodos anteriormente estudiados. Así que en este punto se pueden aplicar las reglas de inferencia y las leyes de equivalencia lógica del capítulo anterior para obtener la *conclusión del argumento.*

4. Finalmente y en caso de ser necesario, se usan las reglas de generalización universal y existencial para añadir los cuantificadores necesarios.

Ejemplo 5.3 *Demostrar la validez del siguiente argumento:*
"Todos los hombres son mortales. Todos los griegos son hombres. Por lo tanto, Todos los griegos son mortales".
$U = \{seres\ humanos\}$.
$H(x) : x$ *es un hombre.*
$M(x) : x$ *es mortal.*
$G(x) : x$ *es Griego.*

$$\begin{array}{l} \forall x \in U : H(x) \to M(x) \\ \forall x \in U : G(x) \to H(x) \\ \hline \therefore \forall x \in U : G(x) \to M(x) \end{array}$$

Paso		**Justificación**
1)	$\forall x \in U : H(x) \to M(x)$	Premisa 1
2)	$\forall x \in U : G(x) \to H(x)$	Premisa 2
3)	$H(x) \to M(x)$	Regla de PU en 1)
4)	$G(x) \to H(x)$	Regla de PU en 2)
5)	$[G(x) \to H(x)] \wedge [H(x) \to M(x)]$	Ley de conjunción entre 4) y 3)
6)	$G(x) \to M(x)$	Silogismo hipotético en 5)
7)	$\forall x \in U : G(x) \to M(x)$	Regla de GU en 6)

Observación: Observe que en el paso 6 de, obtenemos a la proposición abierta $G(x) \to M(x)$ que si bien no es cierto que sea la conclusión del argumento inicial, es la conclusión SIN el cuantificador. Por ello en necesario aplicar a esta proposición abierta la Regla de Generalización Universal que nos permite obtener a la conclusión del argumento (que es una proposición cuantificada).

Ejemplo 5.4 *Demostrar la validez del siguiente argumento:*
"Ningún silogismo válido tiene dos premisas negativas. Ningún silogismo de esta página es inválido. Luego, ningún silogismo de esta página tiene dos premisas negativas".
$U = \{argumentos\ válidos\}$.
$S(x) : x$ *es un silogismo.*
$V(x) : x$ *es válido.*
$P(x) : x$ *tiene dos premisas negativas.*
$R(x) : x$ *está en esta página.*

$$\begin{array}{l} \neg\exists x \in U : S(x) \wedge V(x) \wedge P(x) \\ \neg\exists x \in U : S(x) \wedge R(x) \wedge \neg V(x) \\ \hline \therefore \neg\exists x \in U : S(x) \wedge R(x) \wedge P(x) \end{array}$$

Paso		**Justificación**
1)	$\neg\exists x \in U : S(x) \wedge V(x) \wedge P(x)$	Premisa 1
2)	$\neg\exists x \in U : S(x) \wedge R(x) \wedge \neg V(x)$	Premisa 2
3)	$\neg\exists x \in U : \neg[\neg S(x) \vee \neg V(x) \vee \neg P(x)]$	Ley de De Morgan para $\vee$ en 1)
4)	$\forall x \in U : \neg S(x) \vee \neg V(x) \vee \neg P(x)$	$\forall x : P(x) \equiv \neg\exists x \in U : \neg P(x)$ en 3)
5)	$\neg\exists x \in U : \neg[\neg S(x) \vee \neg R(x) \vee \neg(\neg V(x))]$	Ley de De Morgan para $\vee$ en 2)
6)	$\neg\exists x \in U : \neg[\neg S(x) \vee \neg R(x) \vee V(x)]$	Doble negación en 5)
7)	$\forall x \in U : \neg S(x) \vee \neg R(x) \vee V(x)$	$\forall x \in U : P(x) \equiv \neg\exists x \in U : \neg P(x)$ en 6)
8)	$\neg S(x) \vee \neg V(x) \vee \neg P(x)$	Regla PU en 4)
9)	$\neg S(x) \vee \neg R(x) \vee V(x)$	Regla PU en 7)
10)	$[\neg S(x) \vee \neg R(x)] \vee V(x)$	Ley asociativa para $\vee$ en 9)
11)	$\neg[S(x) \wedge R(x)] \vee V(x)$	Ley de De Morgan para $\wedge$ en 10)
12)	$S(x) \wedge R(x) \rightarrow V(x)$	Equiv. para la implicación en 11)
13)	$\neg V(x) \vee \neg S(x) \vee \neg P(x)$	Ley conmutativa para $\vee$ en 8)
14)	$\neg V(x) \vee [\neg S(x) \vee \neg P(x)]$	Ley asociativa para $\vee$ en 13)
15)	$V(x) \rightarrow \neg S(x) \vee \neg P(x)$	Equiv. para la implicación en 14)
16)	$[S(x) \wedge R(x) \rightarrow V(x)] \wedge [V(x) \rightarrow \neg S(x) \vee \neg P(x)]$	Ley de conjunción entre 12) y 15)
17)	$S(x) \wedge R(x) \rightarrow \neg S(x) \vee \neg P(x)$	Silogismo hipotético en 16)
18)	$\neg[S(x) \wedge R(x)] \vee \neg S(x) \vee \neg P(x)$	Equiv. para la implicación en 17)
19)	$\neg S(x) \vee \neg R(x) \vee \neg S(x) \vee \neg P(x)$	Ley de De Morgan para $\wedge$ en 18)
20)	$\neg S(x) \vee \neg S(x) \vee \neg R(x) \vee \neg P(x)$	Ley conmutativa para $\vee$ en 19)
21)	$[\neg S(x) \vee \neg S(x)] \vee \neg R(x) \vee \neg P(x)$	Ley asociativa para $\vee$ en 20)
22)	$\neg S(x) \vee \neg R(x) \vee \neg P(x)$	Ley de idempotencia para $\vee$ en 21)
23)	$\forall x \in U : \neg S(x) \vee \neg R(x) \vee \neg P(x)$	Regla GU en 22)
24)	$\forall x \in U : \neg[S(x) \wedge R(x) \wedge P(x)]$	Ley de De Morgan para $\wedge$ en 23)
25)	$\neg\exists x \in U : [S(x) \wedge R(x) \wedge P(x)]$	$\forall x \in U : \neg P(x) \equiv \neg\exists x \in U : P(x)$ en 24

Ejemplo 5.5 *Demostrar la validez del siguiente argumento:*
"Todos los miembros del Congreso son habitantes de la Ciudad, pero algunos candidatos viven fuera de la Ciudad; luego algunos candidatos no son miembros del Congreso".

$U = \{$*las personas*$\}$.
$M(x) : x$ *es miembro del Congreso.*
$H(x) : x$ *es habitante de la Ciudad.*

$C(x)$: *x es candidato.*

$$\begin{array}{l} \forall x \in U : M(x) \rightarrow H(x) \\ \exists x \in U : C(x) \wedge \neg H(x) \\ \hline \therefore \exists x : C(x) \wedge \neg M(x) \end{array}$$

Para este ejemplo se darán dos pruebas de validez.

Primera Prueba

Paso		**Justificación**
1)	$\forall x \in U : M(x) \rightarrow H(x)$	Premisa 1
2)	$\exists x \in U : C(x) \wedge \neg H(x)$	Premisa 2
3)	$M(y) \rightarrow H(y)$	Regla de PU en 1)
4)	$C(y) \wedge \neg H(y)$	Regla de PE en 2)
5)	$\neg H(y)$	Ley de simplificación en 4)
6)	$\neg H(y) \wedge [M(y) \rightarrow H(y)]$	Ley de conjunción entre 5) y 3)
7)	$\neg M(y)$	*Modus tollendo tollens* en 6)
8)	$C(y)$	Ley de simplificación en 4)
9)	$C(y) \wedge M(y)$	Ley de conjunción entre 8) y 7)
10)	$\exists x \in U : C(x) \wedge M(x)$	Regla de GE en 9)

Segunda Prueba

Paso		**Justificación**
1)	$\forall x \in U : M(x) \rightarrow H(x)$	Premisa 1
2)	$\exists x \in U : C(x) \wedge \neg H(x)$	Premisa 2
3)	$C(y) \wedge \neg H(y)$	Regla de PE en 2)
4)	$M(y) \rightarrow H(y)$	Regla de PU en 1)
5)	$\neg H(y)$	Ley de simplificación en 4)
6)	$\neg H(y) \wedge [M(y) \rightarrow H(y)]$	Ley de conjunción entre 5) y 4)
7)	$\neg M(y)$	*Modus tollendo tollens* en 6)
8)	$C(y)$	Ley de simplificación en 3)
9)	$C(y) \wedge M(y)$	Ley de conjunción entre 8) y 7)
10)	$\exists x \in U : C(x) \wedge M(x)$	Regla de GE en 9)

Observación: A simple vista, la diferencia está en que en la primera prueba, primero primero se realizó la particularización universal de la Premisa 1 y luego se realizó la particularización existencial de la Premisa 2. Mientras que en la prueba 2, primero se realizó la particularización existencial de la Premisa 2 y luego se realizó la particularización universal de la Premisa 1. Y de hecho esa es la única diferencia, sin embargo la primera prueba es incorrecta mientras que la segunda si es correcta. Discutiremos acerca del por qué de esta situación.

Comentarios sobre la primera prueba:

- Dado que TODO elemento del universo del discurso satisface la primera premisa, se puede concluir, por particularización universal, que el elemento llamado $y \in U$ hace que $M(y) \rightarrow H(y)$ sea una proposición verdadera.

- La premisa dos, asegura que existe al menos un elemento de U que logra que $C(x) \wedge \neg H(x)$ sea una proposición verdadera. En esta prueba se supuso que el elemento y, que ya se había elegido en la particularización universal, es también un elemento que hace que $C(x) \wedge \neg H(x)$ sea una proposición verdadera. Ahora bien, no existe ninguna manera de asegurar que ese elemento y sea el que satisface a la segunda premisa. Por lo que al emplear al elemento y para la particularización existencial de la premisa 2, se puede estar introduciendo una premisa falsa.

Comentarios sobre la segunda prueba:

- La premisa dos, asegura que existe al menos un elemento de U que logra que $C(x) \wedge \neg H(x)$ sea una proposición verdadera. En esta prueba, en primer lugar, se supone que el elemento $y \in U$ es un elemento que hace que $C(y) \wedge \neg H(y)$ sea una proposición verdadera.

- Dado que TODO elemento del universo del discurso satisface la primera premisa y en vista que y es un elemento del universo del discurso, este elemento necesariamente satisface que $M(y) \rightarrow H(y)$ es una proposición verdadera.

Finalmente se puede observar que en la prueba dos se asegura que no se está introduciendo una premisa falsa, mientras que en la primera prueba no se puede descartar esta posibilidad.

Ejemplo 5.6 *Demostrar la validez del siguiente argumento:*
"Todos los yudokas son seres sanos. Si alguien es sano y come bien es de esperarse que viva larga vida. No hay cocinero que no coma bien. Juan es yudoka y cocinero. Por lo tanto, es de esperarse que Juan viva largo tiempo."
$U = \{las\ personas\}$.
$Y(x) : x$ *es yudoka.*
$S(x) : x$ *es sano.*
$B(x) : x$ *come bien.*
$V(x) : x$ *tiene una larga vida.*
$C(x) : x$ *es cocinero.*
j : *Juan.*

$$\begin{array}{l} \forall x \in U : Y(x) \to S(x) \\ \forall x \in U : S(x) \wedge B(x) \to V(x) \\ \neg\exists x \in U : C(x) \wedge \neg B(x) \\ Y(j) \wedge C(j) \\ \hline \therefore V(j) \end{array}$$

Observación: Note que la conclusión de este argumento no es una proposición cuantificada, en este caso se quiere concluir cierta información sobre un sujeto llamado Juan, es por ello que las particularizaciones, deben hacerse para el sujeto Juan.

Paso		**Justificación**
1)	$\forall x \in U : Y(x) \to S(x)$	Premisa 1
2)	$\forall x \in U : S(x) \wedge B(x) \to V(x)$	Premisa 2
3)	$\neg\exists x \in U : C(x) \wedge \neg B(x)$	Premisa 3
4)	$Y(j) \wedge C(j)$	Premisa 4
5)	$\neg\exists x \in U : \neg[\neg C(x) \vee B(x)]$	Ley de De Morgan para $\vee$ en 4)
6)	$\forall x \in U : \neg C(x) \vee B(x)$	$\neg\exists x \in U : \neg P(x) \equiv \forall x \in U : P(x)$ en 5)
7)	$Y(j) \to S(j)$	Regla de PU en 1)
8)	$S(j) \wedge B(j) \to V(j)$	Regla de PU en 2)
9)	$\neg C(j) \vee B(j)$	Regla de PU en 6)

10)	$Y(j)$	Ley de simplificación en 4)
11)	$Y(j) \wedge [Y(j) \rightarrow S(j)]$	Ley de conjunción entre 10) y 7)
12)	$S(j)$	*Modus ponendo ponens* en 11)
13)	$C(j)$	Ley de simplificación en 4)
14)	$[\neg C(j) \vee B(j)] \wedge C(j)$	Ley de conjunción entre 9) y 13)
15)	$B(j)$	Silogismo disyuntivo en 14)
16)	$S(j) \wedge B(j)$	Ley de conjunción entre 12) y 15)
17)	$[S(j) \wedge B(j)] \wedge [S(j) \wedge B(j) \rightarrow V(j)]$	Ley de conjunción entre 16) y 8)
18)	$V(j)$	*Modus ponendo ponens* en 17)

Ya para finalizar con esta sección de prueba de validez para argumentos en lógica de predicados, colocaremos dos ejemplos donde se utilicen la prueba por reducción al absurdo y la prueba condicional.

Ejemplo 5.7 *Demostrar la validez del siguiente argumento usando prueba por reducción al absurdo:*

$$\begin{array}{l} \forall x \in U : P(x) \rightarrow \neg B(x) \\ \forall x \in U : O(x) \rightarrow B(x) \\ \forall x \in U : C(x) \rightarrow P(x) \\ \hline \therefore \forall x \in U : C(x) \rightarrow \neg O(x) \end{array}$$

Observación: Para este tipo de prueba, hay que negar la conclusión y asumirla como una nueva premisa. Luego hay que lograr que este nuevo conjunto de premisas impliquen lógicamente a una contradicción.

Negación de la conclusión:

	$\neg\forall x \in U : C(x) \rightarrow \neg O(x)$	**Justificación**
$\equiv$	$\exists x \in U : \neg[C(x) \rightarrow \neg O(x)]$	$\neg\forall x \in U : P(x) \equiv \exists x \in U : \neg P(x)$
$\equiv$	$\exists x \in U : \neg[\neg C(x) \vee \neg O(x)]$	Equiv. para la implicación
$\equiv$	$\exists x \in U : \neg[\neg C(x)] \wedge \neg[\neg O(x)]$	Ley de De Morgan para $\vee$
$\equiv$	$\exists x \in U : C(x) \wedge O(x)$	Doble negación

Paso		**Justificación**
1)	$\forall x \in U : P(x) \to \neg B(x)$	Premisa 1
2)	$\forall x \in U : O(x) \to B(x)$	Premisa 2
3)	$\forall x \in U : C(x) \to P(x)$	Premisa 3
4)	$\exists x \in U : C(x) \wedge O(x)$	Premisa 4 (Negación de la conclusión)
5)	$C(a) \wedge O(a)$	Regla de PE en 4)
6)	$P(a) \to \neg B(a)$	Regla de PU en 1)
7)	$O(a) \to B(a)$	Regla de PU en 2)
8)	$C(a) \to P(a)$	Regla de PU en 3)
9)	$[C(a) \to P(a)] \wedge [P(a) \to \neg B(a)]$	Ley de conjunción entre 8) y 6)
10)	$C(a) \to \neg B(a)$	Silogismo hipotético en 9)
11)	$C(a)$	Ley de simplificación en 5)
12)	$C(a) \wedge [C(a) \to \neg B(a)]$	Ley de conjunción entre 11) y 10)
13)	$\neg B(a)$	*Modus ponendo ponens* en 12)
14)	$O(a)$	Ley de simplificación en 5)
15)	$O(a) \wedge [O(a) \to B(a)]$	Ley de conjunción entre 14) y 7)
16)	$B(a)$	*Modus ponendo ponens* en 15)
17)	$B(a) \wedge \neg B(a)$	Ley de conjunción entre 16) y 13)
18)	$\forall x \in U : [C(x) \to \neg O(x)]$	Prueba por reducción al absurdo

Ejemplo 5.8 *Demostrar la validez del siguiente argumento usando prueba condicional:*

$$\begin{array}{l} \forall x \in U : C(x) \wedge [T(x) \vee M(x)] \to \neg Q(x) \\ \forall x \in U : E(x) \to Q(x) \\ \hline \therefore \forall x : C(x) \wedge T(x) \to \neg E(x) \end{array}$$

Paso		**Justificación**
1)	$\forall x \in U : C(x) \wedge [T(x) \vee M(x)] \to \neg Q(x)$	Premisa 1
2)	$\forall x \in U : E(x) \to Q(x)$	Premisa 2
3)	$C(y) \wedge [T(y) \vee M(y)] \to \neg Q(y)$	Regla de PU en 1)
4)	$[C(y) \wedge T(y)] \vee [C(y) \wedge M(y)] \to \neg Q(y)$	Ley distributiva para $\wedge$ en 3)
5)	$\neg[[C(y) \wedge T(y)] \vee [C(y) \wedge M(y)]] \vee \neg Q(y)$	Equiv. para la implicación en 4)
6)	$[\neg[C(y) \wedge T(y)] \wedge \neg[C(y) \wedge M(y)]] \vee \neg Q(y)$	Ley de De Morgan para $\vee$ en 5)
7)	$[\neg[C(y) \wedge T(y)] \vee \neg Q(y)] \wedge [\neg[C(y) \wedge M(y)] \vee \neg Q(y)]$	Ley distributiva para $\vee$ en 6)
8)	$\neg[C(y) \wedge T(y)] \vee \neg Q(y)$	Ley de simplificación en 7)
9)	$C(y) \wedge T(y) \to \neg Q(y)$	Equiv. para la implicación en 8)
10)	$E(y) \to Q(y)$	Regla de PU en 2)
11)	$\neg Q(y) \to \neg E(y)$	Contraposición en 10)
12)	$[C(y) \wedge T(y) \to \neg Q(y)] \wedge [\neg Q(y) \to \neg E(y)]$	Ley de conjunción entre 9) y 11)
13)	$C(y) \wedge T(y) \to \neg E(y)$	Silogismo hipotético en 12)
14)	$C(y) \wedge T(y)$	Premisa condicional
15)	$[C(y) \wedge T(y)] \wedge [C(y) \wedge T(y) \to \neg E(y)]$	Ley de conjunción entre 14) y 13)
16)	$\neg E(y)$	*Modus ponendo ponens* en 15)
17)	$C(y) \wedge T(y) \to \neg E(y)$	Prueba condicional
18)	$\forall x \in U : C(x) \wedge T(x) \to \neg E(x)$	Regla de GU en 17)

5.6.2 Argumentos inválidos

Establecer si un argumento es inválido en lógica de predicados, es similar que en la lógica proposicional, sólo que en la lógica de predicados tiene que tenerse en cuenta el universo del discurso. Más específicamente la combinación de premisas verdaderas con conclusión falsa no puede darse para NINGÚN universo del discurso que contenga al menos un elemento.

Ejemplo 5.9 *Demostrar la invalidez del siguiente argumento:*
"Todas las estrellas tienen luz propia. Ninguna nube es una estrella. Luego, ninguna nube tiene luz propia."
$U = \{cuerpos\ celestes\}$.
$E(x) : x$ *es una estrella.*

$L(x)$: *x tiene luz propia.*
$N(x)$: *x una nube.*

$$\begin{array}{l} \forall x \in U : E(x) \to L(x) \\ \neg\exists x \in U : N(x) \wedge E(x) \\ \hline \therefore \neg\exists x \in U : N(x) \wedge L(x) \end{array}$$

Usando leyes de equivalencia para proposiciones cuantificadas, el argumento anterior se puede escribir como

$$\begin{array}{l} \forall x \in U : E(x) \to L(x) \\ \forall x \in U : N(x) \to \neg E(x) \\ \hline \therefore \forall x \in U : N(x) \to \neg L(x) \end{array}$$

- Suponiendo que U posee un sólo elemento: $U = \{a\}$. Note que cuando en el Universo del discurso hay un sólo elemento se tiene que $\forall x : P(x) \equiv \exists x : P(x)$. En este caso el argumento dado se puede escribir como

$$\begin{array}{l} E(a) \to L(a) \\ N(a) \to \neg E(a) \\ \hline \therefore N(a) \to \neg L(a) \end{array}$$

En este punto se tiene un argumento en lógica proposicional y se tratará de encontrar una combinación de los valores de verdad de las proposiciones $E(a), L(a)$ y $N(a)$ [5], tales que TODAS las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa.

$E(a)$	$L(a)$	$N(a)$	$\overbrace{(E(a) \to L(a)) \wedge (N(a) \to \neg E(a))}^{Premisas}$	$\overbrace{N(a) \to \neg L(a)}^{Conclusion}$
V	V	V	$V \wedge V$	F

Dado que este último argumento en inválido podemos concluir que el argumento inicial también es inválido.

Ejemplo 5.10 *Demostrar la invalidez del siguiente argumento:*
"Algunos médicos son matasanos. Algunos matasanos no son responsables. Por lo tanto algunos médicos no son responsables."
$U = \{las\ personas\}$.
$M(x)$: *x es un médico.*
$A(x)$: *x es un matasanos.*
$R(x)$: *x es responsable.*

[5] Recuerde que cuando una proposición abierta toma un valor particular del Universo del discurso, se obtiene una proposición.

$$
\begin{array}{l}
\exists x \in U : M(x) \wedge A(x) \\
\exists x \in U : A(x) \wedge \neg R(x) \\
\hline
\therefore \exists x \in U : M(x) \wedge \neg R(x)
\end{array}
$$

- Suponiendo que U posee un sólo elemento: $U = \{a\}$. En este caso el argumento dado se puede escribir como

$$
\begin{array}{l}
M(a) \wedge A(a) \\
A(a) \wedge \neg R(a) \\
\hline
\therefore M(a) \wedge \neg R(a)
\end{array}
$$

y este argumento es válido. Esto no nos garantiza que el argumento inicial sea válido, pues podría ocurrir que con un universo del discurso de dos elementos se obtenga un razonamiento inválido.

- Suponiendo que U posee dos elementos: $U = \{a, b\}$.

Nota. Recuerde que si $U = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ entonces,

$$\forall x \in U : P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$$

$$\exists x \in U : P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)$$

En este caso el argumento dado se puede escribir como

$$
\begin{array}{ll}
P_1 : & (M(a) \wedge A(a)) \vee (M(b) \wedge A(b)) \\
P_2 : & (A(a) \wedge \neg R(a)) \vee (A(b) \wedge \neg R(b)) \\
\hline
C : & \therefore (M(a) \wedge \neg R(a)) \vee (M(b) \wedge \neg R(b))
\end{array}
$$

Con los siguientes valores de verdad de las proposiciones de este nuevo argumento se obtiene que las premisas son todas verdaderas y la conclusión es falsa, por lo tanto el argumento es inválido y esto nos permite concluir que el argumento inicial también es inválido.

$M(a)$	$M(b)$	$A(a)$	$A(b)$	$R(a)$	$R(b)$	P_1	P_2	C
F	V	V	V	F	V	V	V	F

Capítulo 6

Teoría de conjuntos

6.1 Conceptos básicos

Definición 6.1 *Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos. Estos objetos reciben el nombre de elementos.*

Observación:

- Cuando se dice *"colección bien definida"*, se quiere decir, que no debe haber ambigüedad a la hora de determinar si un elemento está o no en el conjunto. Por ejemplo si tenemos que A es el conjunto de las vocales, no hay espacio a duda que la letra "b" no está en el conjunto mientras que la letra "a" si está en el conjunto.
  Ahora bien, si definimos a B como el conjunto de las mejores directores de cine, tenemos ambigüedad ya que la pertenencia o no de un determinado director, estará sujeta a la opinión de la persona que cataloga el elemento.

- En general los conjuntos se denotan por letras de mayúsculas, delimitado por llaves y sus elementos se separan por comas. (En caso que se listen todos y cada uno de los elementos del conjunto).

Definición 6.2 *Si x es un elemento del conjunto A, se tiene que x "pertenece al conjunto" A, lo cual se denota por $x \in A$. Si por el contrario x no es elemento de A, se tiene que x "no pertenece al conjunto" A y se denota por $x \notin A$.*

Observación: Note que $x \in A$ es una proposición abierta por lo cual puede negarse, es decir, $\neg(x \in A)$ es también una proposición abierta y ésta se denota por $x \notin A$.

Ejemplo 6.1 *Sea* $P = \{2, 3, 5, 7\}$. *Para este conjunto se tiene que* $1 \notin P$ *mientras que* $2 \in P$.

Definición 6.3 *La cantidad de elementos que tiene un conjunto* A *se denomina* ***cardinal*** *de* A *y se denota por* $|A|$.

Existen dos formas de describir a los elementos de un conjunto: por extensión y por comprensión.

Definición 6.4 *Un conjunto* B *está descrito por extensión cuando se nombran uno a uno a los elementos del conjunto* B. *Sin repetir elementos.*

Definición 6.5 *Un conjunto* B *está descrito por compresión cuando se de una propiedad que define a los elementos de* B.

Ejemplo 6.2 *Por extensión:*

- $A = \{7\}$
- $B = \{2, -2\}$
- $C = \{C, O, R, E, T\}$

Ejemplo 6.3 *Por comprensión:*

- $A = \{x/x - 5 = 2\}$
- $B = \{x/x^2 = 4\}$
- $C = \{x/x \text{ es letra de la palabra ``CORRECTO''}\}$

Observación: Existen conjuntos que no pueden ser descritos por extensión, ya que poseen infinitos elementos. Por ejemplo, el conjunto de los números pares, sólo puede ser definido por comprensión:

$$P = \{x \in \mathbb{Z}/x = 2k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\},$$

o más formalmente como:

$$P = \{x \in \mathbb{Z}/\exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\}.$$

Para finalizar con esta sección de conceptos básicos, definiremos dos conjuntos importantes: el conjunto vacío y el conjunto universal.

Definición 6.6 *Se define al conjunto vacío como el conjunto que no posee elementos y se denota por* $\emptyset$.

Definición 6.7 *Se define al conjunto universal o universo como aquel conjunto del cual se toman los elementos para describir a otros conjuntos de interés. El conjunto universal se denota por* U.

6.2 Inclusión e igualdad de conjuntos

Considere los siguientes conjuntos, definidos sobre $U = \{$ las personas $\}$

$$A = \{x \in U / x \text{ es Caraqueño}\} \text{ y } B = \{x \in U / x \text{ es Venezolano}\},$$

para estos conjuntos es claro que, "Todo Caraqueño es también Venezolano", por lo que podemos decir que el conjunto A está *incluido* en el conjunto B. Una representación gráfica de A y B viene dada por la figura (6.1).

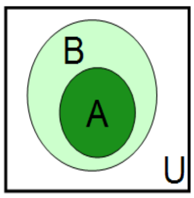

Figura 6.1: Todo Caraqueño es Venezolano.

Cuando decimos que "Todo Caraqueño es Venezolano" es claro que esto lo podemos escribir con la siguiente proposición cuantificada:

$$\forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in B.$$

Observación: Tenga en cuanta que $x \in A$ es una proposición abierta, y cuando x toma un valor particular del universo del discurso se obtiene una proposición que, será verdadera si la persona que elegimos de U es nacida en Caracas y será falsa en caso contrario.

Una vez entendido este ejemplo es fácil dar la definición formal de inclusión entre conjuntos.

Definición 6.8 *Sean A y B dos conjuntos cualesquiera tales que, $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$. Se dice que A está incluido B (o bien que A es subconjunto de B), lo cual se denota por $A \subseteq B$ cuando todo elemento de A es elemento de B, es decir,*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow {}^{1}\forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in B.$$

Observación: Note que $A \subseteq B$ es una proposición, razón por la cual puede negarse, es decir, $\neg(A \subseteq B)$ es también una proposición, que se denota por $A \nsubseteq B$.

De la definición anterior se desprende que A no es subconjunto de B, lo cual se denota por $A \nsubseteq B$, cuando, $\neg\forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in B$, es decir,

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \neg\forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in B,$$

al aplicar leyes de equivalencia lógica a la proposición (6.1) se obtiene que

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x \in U : x \in A \wedge x \notin B. \tag{6.1}$$

Nota. Justificación de (6.1)

$$\begin{aligned} A \nsubseteq B &\Leftrightarrow \neg\forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in B \\ &\Leftrightarrow \exists x \in U : \neg[x \in A \rightarrow x \in B] \\ &\Leftrightarrow \exists x \in U : \neg[\neg(x \in A) \vee x \in B] \\ &\Leftrightarrow \exists x \in U : \neg(\neg(x \in A)) \wedge \neg(x \in B) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in U : x \in A \wedge \neg(x \in B) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in U : x \in A \wedge x \notin B. \end{aligned}$$

Y ahora estamos en capacidad de establecer cuando dos conjuntos son iguales:

Definición 6.9 *Sean A y B dos conjuntos cualesquiera tales que, $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$. Se dice que A es igual al conjunto B, lo cual se denota por $A = B$ cuando, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, es decir,*

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A. \tag{6.2}$$

[1]Recuerde que para indicar que dos proposiciones son lógicamente equivalentes se emplea el símbolo $\equiv$ o el símbolo $\Leftrightarrow$.

Al aplicar a (6.2), la definición de inclusión de conjuntos y leyes de equivalencia lógica, podemos obtener otras proposiciones que también definen a la igualdad entre conjuntos:

		Justificación
	$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$	
$\Leftrightarrow$	$\forall x \in U : [x \in A \to x \in B] \wedge \forall x \in U : [x \in B \to x \in A]$	Def. de $\subseteq$
$\Leftrightarrow$	$\forall x \in U : [x \in A \to x \in B] \wedge [x \in B \to x \in A]$	$\forall x : P(x) \wedge \forall x : Q(x) \equiv$ $\forall x : P(x) \wedge Q(x)$
$\Leftrightarrow$	$\forall x \in U : [x \in A \leftrightarrow x \in B]$	Ley del Bicondicional .

Observación: Note que $A = B$ es una proposición, razón por la cual puede negarse, es decir, $\neg(A = B)$ es también una proposición, que se denota por $A \neq B$.

De la definición de igualdad entre conjuntos, se desprende que A no es igual a B, lo cual se denota por $A \neq B$, cuando $\neg[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$, es decir,

$$A \neq B \Leftrightarrow \neg[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]. \tag{6.3}$$

Observe que al aplicar las leyes de De Morgan a (6.3) se obtiene que

$$A \neq B \Leftrightarrow A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A.$$

Note que, cuando se dice que $A \subseteq B$ no se excluye la posibilidad que A sea igual a B. Esto motiva a la siguiente definición:

Definición 6.10 *Cuando $A \subseteq B$ y $A \neq B$ se dice que A es subconjunto propio de B y se denota por $A \subset B$, es decir,*

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

Observación: Note que $A \subset B$ es una proposición, razón por la cual puede negarse, es decir, $\neg(A \subset B)$ es también una proposición, que se denota por $A \not\subset B$.

De la definición subconjunto propio, se desprende que A no es subconjunto propio de B, lo cual se denota por $A \not\subset B$, cuando $\neg[(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)]$, es decir,

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \neg[(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)]. \tag{6.4}$$

Observe que al aplicar las leyes de De Morgan a (6.4) se obtiene que

$$A \not\subset B \Leftrightarrow A \nsubseteq B \vee A = B.$$

A continuación colocamos algunas propiedades de la operación $\subseteq$ y de la operación $\subset$. Sean A, B y C conjuntos cualesquiera, tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ y $C \subseteq U$.

1. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

2. $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

3. $A \subset B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$.

4. $A \subseteq B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Demostración de 1 y 2:

Observación: Cada una de estas propiedades tiene la forma $p_1 \wedge p_2 \Rightarrow q$ siendo p_1, p_2 y q proposiciones lógicas. Esta estructura corresponde a un argumento, razón por lo cual, demostrar estas propiedades se reduce a probar que q es consecuencia lógica de las proposiciones p_1 y p_2.

1. Demostrar que $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Paso		**Justificación**
1)	$A \subseteq B$	Premisa 1
2)	$B \subseteq C$	Premisa 2
3)	$\forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in B$	Def. de $\subseteq$ en 1)
4)	$\forall x \in U : x \in B \rightarrow x \in C$	Def. de $\subseteq$ en 2)
5)	$x \in A \rightarrow x \in B$	Regla PU en 3)
6)	$x \in B \rightarrow x \in C$	Regla PU en 4)
7)	$[x \in A \rightarrow x \in B] \wedge [x \in B \rightarrow x \in C]$	Ley de conjunción entre 5) y 6)
8)	$x \in A \rightarrow x \in C$	Silogismo hipotético en 7)
9)	$\forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in C$	Regla GU en 8)
10)	$A \subseteq C$	Def. de $\subseteq$ en 9).

2. Demostrar que $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Antes de iniciar la demostración, note que

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \nsubseteq A. \tag{6.5}$$

Nota. Justificación de (6.5)

$$\begin{array}{llll} A \subset B & \Leftrightarrow & A \subseteq B \wedge A \neq B & \text{Def. de } \subset \\ & \Leftrightarrow & A \subseteq B \wedge (A \not\subseteq B \vee B \not\subseteq A) & \text{Def. de } \neq \\ & \Leftrightarrow & (A \subseteq B \wedge A \not\subseteq B) \vee (A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A) & \text{Ley distributiva para } \wedge \\ & \Leftrightarrow & F \vee (A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A) & \text{Ley de contradicción} \\ & \Leftrightarrow & A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A & \text{Ley de identidad para } \vee \text{ .} \end{array}$$

Usando (6.5), se obtiene que probar la propiedad (2) se reduce a demostrar la validez del siguiente argumento:

$$\begin{array}{l} A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A \\ B \subseteq C \wedge C \not\subseteq B \\ \hline \therefore A \subseteq C \wedge C \not\subseteq A \end{array}$$

y para ello, emplearemos la prueba por reducción al absurdo:

Paso		**Justificación**
1)	$A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A$	Premisa 1
2)	$B \subseteq C \wedge C \not\subseteq B$	Premisa 2
3)	$\neg(A \subseteq C \wedge C \not\subseteq A)$	Premisa 3 (Negación de la conclusión)
4)	$A \not\subseteq C \vee C \subseteq A$	Ley de De Morgan para $\wedge$ en 3)
5)	$A \subseteq B$	Ley de simplificación en 1)
6)	$B \subseteq C$	Ley de simplificación en 2)
7)	$A \subseteq B \wedge B \subseteq C$	Ley de conjunción entre 5) y 6)
8)	$A \subseteq C$	Propiedad 1 en 7)
9)	$(A \not\subseteq C \vee C \subseteq A) \wedge A \subseteq C$	Ley de conjunción entre 4) y 8)
10)	$C \subseteq A$	Silogismo disyuntivo en 9)
11)	$B \subseteq C \wedge C \subseteq A$	Ley de conjunción entre 6) y 10)
12)	$B \subseteq A$	Propiedad 1 en 11)
13)	$B \not\subseteq A$	Ley de simplificación en 1)
14)	$B \not\subseteq A \wedge B \subseteq A$	Ley de conjunción entre 13) y 12) Contradicción
15)	$A \subseteq C \wedge C \not\subseteq A$	Prueba por reducción al absurdo.

Para finalizar esta sección, considere el siguiente ejemplo que nos permitirá establecer diferencias entre la relación de pertenencia ($\in$) y la relación de inclusión ($\subseteq$).

Ejemplo 6.4 *Sean* $C = \{1, 2, 3\}$ *y* $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 3\}\}$. *Cuáles son los elemento de* C *y* D *y determine al menos un subconjunto de* C *y de* D.

Elementos:

- *Los números* $1, 2$ *y* 3 *son elementos del conjunto* C.
- *Los conjuntos* $\{1\}, \{2\}$ *y* $\{1, 3\}$ *son los elementos del conjunto* D.

Subconjuntos:

- $\{1\}$ *y* $\{1, 2, 3\}$ *son subconjuntos del conjunto* C. *(¿Por qué?).*
- $\{\{1\}\}$ *y* $\{\{1\}, \{1, 3\}\}$ *son subconjuntos del conjunto* D. *(¿Por qué?).*

6.3 Conjunto de partes

Definición 6.11 *Sea* $A \subseteq U$. *El conjunto de partes de* A *denotado por* $\mathcal{P}(A)$, *es el conjunto de todos los subconjuntos de* A.

Ejemplo 6.5 *Sea* $A = \{a, b, c\}$. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$.

Teorema 6.1 *Si* $|A| = n$ *entonces* $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

6.4 Operaciones entre conjuntos

Sea U el conjunto universal y sean A y B dos conjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$. Se definen las siguientes operaciones entre los conjuntos A y B.

Complemento

El complemento de A denotada por $\overline{A}$ es el conjunto definido como

$$\overline{A} = \{x \in U / x \notin A\}. \tag{6.6}$$

De manera equivalente, la siguiente proposición cuantificada permite identificar cuando un elemento pertenece a $\overline{A}$

$$\forall x \in U : x \in \overline{A} \leftrightarrow x \notin A.$$

Unión

La unión de A y B denotada por $A \cup B$ es el conjunto definido como

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}. \tag{6.7}$$

De manera equivalente, la siguiente proposición cuantificada permite identificar cuando un elemento pertenece a $A \cup B$

$$\forall x \in U : x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

Intersección

La intersección de A y B denotada por $A \cap B$ es el conjunto definido como

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}. \tag{6.8}$$

De manera equivalente, la siguiente proposición cuantificada permite identificar cuando un elemento pertenece a $A \cap B$

$$\forall x \in U : x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

Diferencia

La diferencia entre A y B denotada por $A - B$ es el conjunto definido como

$$A - B = \{x \in U / x \in A \wedge x \notin B\}. \tag{6.9}$$

De manera equivalente, la siguiente proposición cuantificada permite identificar cuando un elemento pertenece a $A - B$

$$\forall x \in U : x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

Observación: Note que

$$\begin{aligned} A - B &= \{x \in U / x \in A \wedge x \notin B\} \\ &= \{x \in U / x \in A \wedge x \in \overline{B}\} \\ &= A \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

Diferencia simétrica

La diferencia simétrica entre A y B denotada por $A \triangle B$ es el conjunto definido como

$$A \triangle B = \{x \in U / x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}. \tag{6.10}$$

De manera equivalente, la siguiente proposición cuantificada permite identificar cuando un elemento pertenece a $A \triangle B$

$$\forall x \in U : x \in A \triangle B \leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B.$$

Observación: Note que

$$\begin{aligned} A \triangle B &= \{x \in U / x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\} \\ &= \{x \in U / x \in A \cup B \wedge x \in \overline{A \cap B}\} \\ &= (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}. \end{aligned}$$

Ejemplo 6.6 *Si* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *y* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ *y* $C = \{7, 8, 9\}$ *entonces*

- $A \cap B = \{3, 4, 5\}$.
- $B \cap C = \{7\}$.
- $A \cap C = \emptyset$.
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- $A - B = A \cap \overline{B} = \{1, 2\}$.

  $\overline{B} = \{1, 2, 8, 9, 10\}$.
- $A \triangle C = (A \cup C) \cap (\overline{A \cap C}) = (A \cup C) \cap U = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$.

  $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$.
  $\overline{A \cap C} = U$.

Ejemplo 6.7 *Si* $U = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 11\}$ *y* $A = \{x \in U : x < 7\}$, $B = \{x \in U : x \geq 3\}$, *y* $C = A^c - \{7\}$, *entonces*

- $A \cap B = \{x \in U : 3 \leq x < 7\}$.
- $B \cap C = \{x \in U : 7 < x \leq 11\}$.

  $C = \{x \in U : x \geq 7\} - \{7\} = \{x \in U : x > 7\}$.

- $A \cap C = \emptyset$.
- $A \cup B = U$.
- $A - B = A \cap \overline{B} = \{x \in U : x < 3\}$.

  $\overline{B} = \{x \in U : x < 3\}$.
- $A \triangle C = (A \cup C) \cap (\overline{A \cap C}) = (A \cup C) \cap U = \{x \in U : x \neq 7\}$.

  $A \cup C = \{x \in U : x \neq 7\}$.
  $\overline{A \cap C} = U$.

6.4.1 Leyes en la teoría de conjuntos

A continuación se listas algunas leyes de la teoría de conjuntos:

Ley	**Nombre**
$A \cup B = B \cup A$	Ley conmutativa de la unión
$A \cap B = B \cap A$	Ley conmutativa de la intersección
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Ley asociativa de la union
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Ley asociativa de la intersección
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Ley distributiva de la union
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Ley distributiva de la intersección
$A \cup \emptyset = A$	Elemento neutro de la $\cup$
$A \cap U = A$	Elemento neutro de la $\cap$
$A \cup \overline{A} = U$	Ley de complementación de la $\cup$
$A \cap \overline{A} = \emptyset$	Ley de complementación de la $\cap$
$A \cup A = A$	Ley de idempotencia para la $\cup$
$A \cap A = A$	Ley de idempotencia para la $\cap$
$A \cup U = U$	Ley de identidad de la $\cup$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	Ley de identidad de la $\cap$

Ley	**Nombre**
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Ley de De Morgan para la $\cup$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Ley de De Morgan para la $\cap$
$A \cup (A \cap B) = A$	Ley de absorción de la union
$A \cap (A \cup B) = A$	Ley de absorción de la intersección
$\overline{\overline{A}} = A$	Doble negación

Tabla 6.1: Leyes de la teoría de conjuntos.

Antes de demostrar algunas de estas propiedades, es preciso entender cómo se demuestra que un conjunto A es igual a un conjunto B, puesto que todas estas propiedades tienen este tipo de estructura.

Observación: IMPORTANTE
Por definición de igual de conjuntos se tienen que

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A,$$

Entiéndase que esta sentencia dice que la proposición $A = B$ es *lógicamente equivalente* a la proposición $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$, así que, siempre que se desee demostrar que un conjunto A es igual a un conjunto B, basta con demostrar que $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ es una proposición verdadera. Teniendo en cuanta lo anterior, en primer lugar se puede demostrar que $A \subseteq B$ ($B \subseteq A$) y luego que $B \subseteq A$ ($A \subseteq B$) y por la Ley de conjunción se deduce que $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

- Demostrar que $A \cup B = B \cup A$.

  Dado que $A \cup B = B \cup A \Leftrightarrow (A \cup B \subseteq B \cup A) \wedge (B \cup A \subseteq A \cup B)$. Se debe demostrar que

  1. $A \cup B \subseteq B \cup A$.
  2. $B \cup A \subseteq A \cup B$.

  Demostración de $A \cup B \subseteq B \cup A$.

  Dado que $A \cup B \subseteq B \cup A \Leftrightarrow \forall x \in U : x \in A \cup B \rightarrow x \in B \cup A$.

Se debe demostrar que $\forall x \in U : x \in A \cup B \to x \in B \cup A$.

Observación: IMPORTANTE
Recuerde que se desea probar que

$$\forall x \in U : x \in A \cup B \to x \in B \cup A,$$

es una proposición verdadera para todo $x \in U$. En vista que ésta es una proposición cuantificada universalmente, aplicamos la Regla de Particularización Universal (Regla de PU), para poder quitar al cuantificador. Una vez aplicada la Regla de PU, el objetivo es establecer la verdad de la proposición $x \in A \cup B \to x \in B \cup A$ (siendo x un elemento cualquiera del Universo). Recordando la prueba condicional, si se logra establecer que $x \in A \cup B$ *implica lógicamente* a la proposición $x \in B \cup A$, se está demostrando que $x \in A \cup B \to x \in B \cup A$ es verdadera para un elemento x cualquiera de U y finalmente si aplicamos la Regla de Generalización Universal, obtenemos que $\forall x \in U : x \in A \cup B \to x \in B \cup A$ es una proposición cuantificada verdadera.

Sea un $x \in U$ cualquiera.

Paso		**Justificación**
1)	$x \in A \cup B$	Premisa Condicional
2)	$x \in A \vee x \in B$	Def. de $\cup$ en 1)
3)	$x \in B \vee x \in A$	Ley conmutativa para $\vee$ en 2)
4)	$x \in B \cup A$	Def. de $\cup$ en 3)
5)	$x \in A \cup B \to x \in B \cup A$	Prueba Condicional en 4)
6)	$\forall x \in U : x \in A \cup B \to x \in B \cup A$	Regla GU en 5)
7)	$A \cup B \subseteq B \cup A$	Def. de $\subseteq$ en 6).

Demostración de $B \cup A \subseteq A \cup B$.

Dado que $B \cup A \subseteq A \cup B \Leftrightarrow \forall x \in U : x \in B \cup A \to x \in A \cup B$.

Se debe demostrar que $\forall x \in U : x \in B \cup A \to x \in A \cup B$.
Sea un $x \in U$ cualquiera.

Paso		**Justificación**
1)	$x \in B \cup A$	Premisa Condicional
2)	$x \in B \vee x \in A$	Def. de $\cup$ en 1)
3)	$x \in A \vee x \in B$	Ley conmutativa para $\vee$ en 2)
4)	$x \in A \cup B$	Def. de $\cup$ en 3)
5)	$x \in B \cup A \rightarrow x \in A \cup B$	Prueba Condicional
6)	$\forall x \in U : x \in B \cup A \rightarrow x \in A \cup B$	Regla GU en 5)
7)	$B \cup A \subseteq A \cup B$	Def. de $\subseteq$ en 6).

Dado que $A \cup B \subseteq B \cup A$ y $B \cup A \subseteq A \cup B$ se puede concluir que $A \cup B = B \cup A$.

- ## Demostrar que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Dado que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \Leftrightarrow (\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}) \wedge (\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B})$. Se debe demostrar que

1. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.
2. $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

Demostración de $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Dado que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \Leftrightarrow \forall x \in U : x \in \overline{A \cap B} \rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Se debe demostrar que $\forall x \in U : x \in \overline{A \cap B} \rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Sea un $x \in U$ cualquiera.

Paso		**Justificación**
1)	$x \in \overline{A \cap B}$	Premisa Condicional
2)	$x \notin A \cap B$	Def. de Complemento en 1)
3)	$\neg(x \in A \cap B)$	Def. de $\notin$ en 2)
4)	$\neg(x \in A \wedge x \in B)$	Def. de $\cap$ en 3)
5)	$x \notin A \vee x \notin B$	Ley de De Morgan para $\wedge$ en 4)
6)	$x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}$	Def. de Complemento en 5)
7)	$x \in \overline{A} \cup \overline{B}$	Def. de $\cup$ en en 6)
8)	$x \in \overline{A \cap B} \rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$	Prueba Condicional
9)	$\forall x \in U : x \in \overline{A \cap B} \rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$	Regla GU en 8)
10)	$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$	Def. de $\subseteq$ en 9).

Demostración de $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

Dado que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B} \Leftrightarrow \forall x \in U : x \in \overline{A} \cup \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A \cap B}$.

Se debe demostrar que $\forall x \in U : x \in \overline{A} \cup \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A \cap B}$.

Sea un $x \in U$ cualquiera.

Paso		**Justificación**
1)	$x \in \overline{A} \cup \overline{B}$	Premisa Condicional
2)	$x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}$	Def. de $\cup$ en 1)
3)	$x \notin A \vee x \notin B$	Def. de Complemento en 2)
4)	$\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$	Def. de $\notin$ en 3)
5)	$\neg(x \in A \wedge x \in B)$	Ley de De Morgan para $\wedge$ en 4)
6)	$\neg(x \in A \cap B)$	Def. de $\cap$ en 5)
7)	$x \notin A \cap B$	Def. de $\notin$ en 6)
8)	$x \in \overline{A \cap B}$	Def. de Complemento en 7)
9)	$x \in \overline{A} \cup \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A \cap B}$	Prueba Condicional
10)	$\forall x \in U : x \in \overline{A} \cup \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A \cap B}$	Regla GU en 9)
11)	$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$	Def. de $\subseteq$ en 10).

Dado que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ y $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ se puede concluir que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Cabe señalar que en algunos casos, cuando se desee probar que un conjunto es igual a otro, no necesariamente se deben emplear las definiciones equivalentes que nos permiten obtener proposiciones cuantificadas, ya que la igualdad entre conjuntos puede establecerse sólo usando convenientemente las leyes de la teoría de conjuntos. Con la siguiente demostración explicaremos mejor este punto.

- Demostrar que[2] $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

  En primer lugar, considere la ley de complementación de la unión que establece que, un conjunto cualquiera unido con su completemento es igual al conjunto universal, es decir, dado un conjunto W cualquiera, se tiene que $W \cup \overline{W} = U$. En segundo lugar, la ley de complementación de la intersección, establece que si un conjunto V es el complemento de un conjunto W, entonces $W \cap V = \emptyset$.

[2]Misma demostración anterior, pero ahora no emplearemos proposiciones cuantificadas.

Observe que la igualdad que se desea demostrar está expresando que el complemento de $A \cap B$ es $\overline{A} \cup \overline{B}$. Ahora bien, teniendo en cuenta los dos comentarios anteriores, si $\overline{A} \cup \overline{B}$ es realmente el complemento de $A \cap B$, dicho conjunto debe satisfacer los dos siguientes propiedades

1. $(A \cap B) \cup (\overline{A \cap B}) = U$.
2. $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap B}) = \emptyset$.

Finalmente al demostrar estas dos propiedades se está demostrando que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Ambas demostraciones se realizan a continuación.

Demostración de 1.

		Justificación
	$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B})$	
$=$	$(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (A \cap B)$	Ley conmutativa de la $\cup$
$=$	$((\overline{A} \cup \overline{B}) \cup A) \cap ((\overline{A} \cup \overline{B}) \cup B)$	Ley distributiva de la $\cup$
$=$	$((\overline{B} \cup \overline{A}) \cup A) \cap ((\overline{A} \cup \overline{B}) \cup B)$	Ley conmutativa de la $\cup$
$=$	$(\overline{B} \cup (\overline{A} \cup A)) \cap (\overline{A} \cup (\overline{B} \cup B))$	Ley asociativa de la $\cup$
$=$	$(\overline{B} \cup U) \cap (\overline{A} \cup U)$	Ley de complementación de la $\cup$
$=$	$U \cap U$	Ley de identidad de la $\cup$
$=$	U	Ley de idempotencia de la $\cap$.

Demostración de 2.

		Justificación
	$(A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$	
$=$	$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap B})$	Ley de De Morgan para la $\cap$
$=$	$\emptyset$	Ley de complementación de la $\cap$

Hemos demostrado que $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B}) = U$ y también que $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap B}) = \emptyset$, de donde se desprende que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

- Demostrar que $\overline{A\triangle B} = A\triangle\overline{B}$.

$$
\begin{array}{rll}
 & & \textbf{Justificación} \\
 & \overline{A\triangle B} & \\
= & \overline{(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}} & \text{Def. de } \triangle \\
= & \overline{(A\cup B)}\cup\overline{\overline{(A\cap B)}} & \text{Ley de De Morgan de la } \cap \\
= & \overline{(A\cup B)}\cup(A\cap B) & \text{Doble Negación} \\
= & (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B) & \text{Ley de De Morgan de la } \cup \\
= & ((\overline{A}\cap\overline{B})\cup A)\cap((\overline{A}\cap\overline{B})\cup B) & \text{Ley distributiva de la } \cup \\
= & (A\cup(\overline{A}\cap\overline{B}))\cap(B\cup(\overline{A}\cap\overline{B})) & \text{Ley conmutativa de la } \cup \\
= & (A\cup\overline{A})\cap(A\cup\overline{B})\cap(B\cup\overline{A})\cap(B\cup\overline{B}) & \text{Ley distributiva de la } \cup \\
= & U\cap(A\cup\overline{B})\cap(B\cup\overline{A})\cap U & \text{Ley de complementación de la } \cup \\
= & U\cap U\cap(A\cup\overline{B})\cap(B\cup\overline{A}) & \text{Ley conmutativa de la } \cup \\
= & (U\cap U)\cap(A\cup\overline{B})\cap(B\cup\overline{A}) & \text{Ley asociativa de la } \cup \\
= & U\cap(A\cup\overline{B})\cap(B\cup\overline{A}) & \text{Ley de idempotencia de la } \cup \\
= & (A\cup\overline{B})\cap(B\cup\overline{A}) & \text{Elemento neutro de la } \cap \\
= & (A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B) & \text{Ley conmutativa de la } \cap \\
= & (A\cup\overline{B})\cap\overline{(A\cap\overline{B})} & \text{Ley de De Morgan de la } \cap \\
= & A\triangle\overline{B} & \text{Def. de } \triangle.
\end{array}
$$

Ejemplo 6.8 *Sean $A, B, C \subseteq U$ Demuestre que*

$$A\cap C = B\cap C \wedge A\cup C = B\cup C \Rightarrow A = B$$

Nota. *En este caso se quiere probar la validez del siguiente argumento*

$$
\begin{array}{l}
P_1 : A\cap C = B\cap C \\
P_2 : A\cup C = B\cup C \\
\hline
\therefore A = B
\end{array}
$$

RECUERDE QUE $A\cap C = B\cap C$, $A\cup C = B\cup C$ y $A = B$ SON PROPOSICIONES LÓGICAS!! *y en este caso $A\cap C = B\cap C$, $A\cup C = B\cup C$ son las premisas del argumento y $A = B$ la conclusión del mismo.*

Asumiendo que las premisas son verdaderas estamos interesados en saber si el argumento es válido, es decir si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas. Ahora bien dado que $A = B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$ podemos reescribir el argumento como

$$
\begin{array}{c}
P_1 \\
P_2 \\
\hline
\therefore A\subseteq B\wedge B\subseteq A
\end{array}
$$

por lo que el objetivo es demostrar que las premisas, P_1 y P_2, implican lógicamente a $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. En primer lugar demostraremos que las premisas implican lógicamente a $A \subseteq B$ y luego que esas mismas premisas implican lógicamente a $B \subseteq A$ y luego por la ley de conjunción podremos concluir que $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ es consecuencia lógica[3] *de las premisas P_1 y P_2.*

<u>Demostración de que $P_1 \wedge P_2 \Rightarrow A \subseteq B$.</u>

Dado que $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in B$.

Se debe demostrar que $\forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in B$ es consecuencia lógica de P_1 y P_2.

Sea un $x \in U$ cualquiera.

Paso		**Justificación**
1)	$x \in A$	Premisa Condicional
2)	$x \in A \vee x \in C$	Ley de adición en 1)
3)	$x \in A \cup C$	Def. de $\cup$ en 2)
4)	$x \in B \cup C$	P_2 en 3)
5)	$x \in A \wedge x \in B \cup C$	Ley de conjunción entre 1) y 4)
6)	$x \in A \cap (B \cup C)$	Def. de $\cap$ en 5)
7)	$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Ley Distributiva de la $\cap$ en 6)
8)	$x \in (A \cap B) \cup (B \cap C)$	P_2 en 7)
9)	$x \in (B \cap A) \cup (B \cap C)$	Ley Conmutativa de la $\cap$ en 8)
10)	$x \in B \cap (A \cup C)$	Ley Distributiva de la $\cap$ en 9)
11)	$x \in B \wedge x \in A \cup C$	Def. de $\cap$ en 10)
12)	$x \in B$	Ley de simplificación en 11)
13)	$x \in A \rightarrow x \in B$	Prueba condicional
14)	$\forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in B$	Regla GU en 13)
15)	$A \subseteq B$	Def. de $\subseteq$ en 14).

<u>Demostración de que $P_1 \wedge P_2 \Rightarrow B \subseteq A$.</u>

Dado que $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in U : x \in B \rightarrow x \in A$.

Se debe demostrar que $\forall x \in U : x \in B \rightarrow x \in A$ es consecuencia lógica de

[3]Recuerde que consecuencia lógica e implicación lógica son expresiones equivalentes.

P_1 y P_2.
Sea un $x \in U$ cualquiera.

Paso		**Justificación**
1)	$x \in B$	Premisa Condicional
2)	$x \in B \vee x \in C$	Ley de adición en 1)
3)	$x \in B \cup C$	Def. de $\cup$ en 2)
4)	$x \in A \cup C$	P_2 en 3)
5)	$x \in B \wedge x \in A \cup C$	Ley de conjunción entre 1) y 4)
6)	$x \in B \cap (A \cup C)$	Def. de $\cap$ en 5)
7)	$x \in (B \cap A) \cup (B \cap C)$	Ley Distributiva de la $\cap$ en 6)
8)	$x \in (B \cap A) \cup (A \cap C)$	P_2 en 7)
9)	$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Ley Conmutativa de la $\cap$ en 8)
10)	$x \in A \cap (B \cup C)$	Ley Distributiva de la $\cap$ en 9)
11)	$x \in A \wedge x \in B \cup C$	Def. de $\cap$ en 10)
12)	$x \in A$	Ley de simplificación en 11)
13)	$x \in B \rightarrow x \in A$	Prueba condicional
14)	$\forall x \in U : x \in B \rightarrow x \in A$	Regla GU en 13)
15)	$B \subseteq A$	Def. de $\subseteq$ en 14).

Como mencionamos al inicio de la demostración, por la ley de conjunción, podemos asegurar que $P_1 \wedge P_2$ implican lógicamente a la proposición $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$ y por la definición de igualdad de conjuntos podemos concluir que $P_1 \wedge P_2 \Rightarrow A = B$.

6.5 Conjunto de indices

En esta sección extenderemos las definiciones de unión e intersección a más de dos conjuntos. Para ello necesitamos conocer que es un conjunto de índices.

Definición 6.12 *Sea I un conjunto, tal que para cada $i \in I$ se tiene un conjunto $A_i \subseteq U$. El conjunto I se denomina conjunto de índices y cada $i \in I$ es un índice.*

Ejemplo 6.9 *Sea $I = \{2, 3, 4\}$, según la figura (6.2) se tiene que*

- *Para $i = 2$ se tiene que $A_2 = A$.*
- *Para $i = 3$ se tiene que $A_3 = C$.*

- *Para $i = 4$ se tiene que $A_4 = B$.*

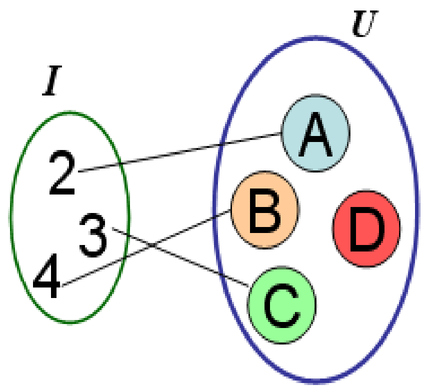

Figura 6.2: Conjunto de indices: ejemplo 6.9

Ejemplo 6.10 *Los elementos de I no necesariamente deben ser números enteros, así que podemos tener $I = \{a, b, c\}$ y según la figura (6.3) se tiene que*

- *Para $i = a$ se tiene que $A_a = W$.*
- *Para $i = b$ se tiene que $A_b = X$.*
- *Para $i = c$ se tiene que $A_c = Z$.*

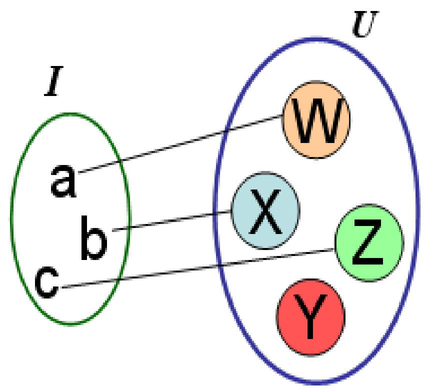

Figura 6.3: Conjunto de indices: ejemplo 6.10

Nota. A pesar que no existe ninguna restricción para que los elementos de I sean números enteros, para facilitar la discusión acerca de los conjuntos de índices asumiremos que los elementos de I son números enteros.

Ahora estamos en capacidad de extender los conceptos de unión e intersección para más de dos conjuntos. Sea $I = \{1, 2, \cdots n\}$ un conjunto de índices y sean los conjuntos $A_i \subseteq U$ definidos por I.

Definición 6.13 *El conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, el cual se denota por $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, se define como:*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x / x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

Observación: La definición anterior se puede reformular usando cuantificadores, así se tiene que

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I / x \in A_i.$$

De lo anterior se desprende que

$$\begin{aligned} x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad &\Leftrightarrow \quad \neg[\exists i \in I / x \in A_i] \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in I / x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in I / x \in \overline{A_i}. \end{aligned}$$

Definición 6.14 *El conjunto $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, el cual se denota por $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ se define como:*

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x/x \in A_i \text{ } para \text{ } todo \text{ } i \in I\}.$$

Observación: La definición anterior se puede reformular usando cuantificadores, así se tiene que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I/x \in A_i.$$

De lo anterior se desprende que

$$\begin{aligned} x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i &\Leftrightarrow \neg[\forall i \in I/x \in A_i] \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I/x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I/x \in \overline{A_i}. \end{aligned}$$

Ejemplo 6.11 *Sea $I = \{3,4,5,6,7\}$ y para cada $i \in I$ sea $A_i = \{1,2,\cdots,i\}$. Defina los conjuntos $\bigcup_{i=3}^{7} A_i$ y $\bigcap_{i=3}^{7} A_i$.*

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=3}^{n} A_7 &= A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \\ &= \{1,2,3\} \cup \{1,2,3,4\} \cup \{1,2,3,4,5\} \cup \{1,2,3,4,5,6\} \cup \{1,2,3,4,5,6,7\} \\ &= \{1,2,3,4,5,6,7\} \\ &= A_7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=3}^{n} A_7 &= A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \\ &= \{1,2,3\} \cap \{1,2,3,4\} \cap \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,4,5,6\} \cap \{1,2,3,4,5,6,7\} \\ &= \{1,2,3\} \\ &= A_3. \end{aligned}$$

Al igual que para la union o la intersección de dos conjuntos, se pueden definir las leyes de De Morgan que se conocen como las *leyes de De Morgan generalizadas:*

- $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

  Demostración:

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i && \text{Def. de complemento.}\\
&\Leftrightarrow \forall i \in I / x \in \overline{A_i} && \text{Def. de } x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i\\
&\Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} && \text{Def. de } \bigcap_{i=1}^{n} A_i.
\end{aligned}
$$

- $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

  Demostración:

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} &\Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i && \text{Def. de complemento.}\\
&\Leftrightarrow \exists i \in I / x \in \overline{A_i} && \text{Def. de } x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i\\
&\Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} && \text{Def. de } \bigcup_{i=1}^{n} A_i.
\end{aligned}
$$

6.6 Producto cartesiano

Definición 6.15 *Sean $A, B \subseteq U$. El producto cartesiano entre A y B denotado por $A \times B$ es el conjunto $\{\ (x, y)/x \in A \wedge x \in B\ \}$. Los elementos de $A \times B$ se denominan pares ordenados.*

Definición 6.16 *Si A y B son conjuntos finitos se tiene que $|A \times B| = |A||B|$.*

Observación: La definición de producto cartesiano se puede extender a más de dos conjuntos:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\ (a_1, a_2, \cdots, a_n)/a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \cdots a_n \in A_n\},$$

los elementos de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ reciben el nombre de $n-$upla ordenada.

Ejemplo 6.12 *Sea* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{a, b\}$*. Defina por extensión a* $A \times B$ *y a* $B \times A$*.*

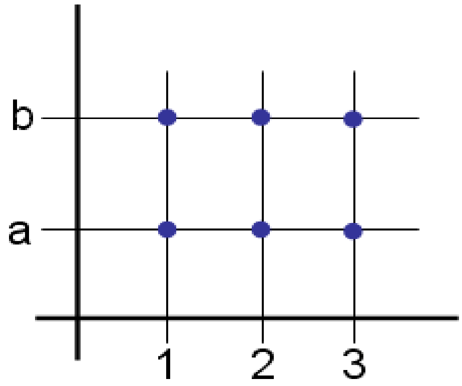

Figura 6.4: Producto cartesiano $A \times B$

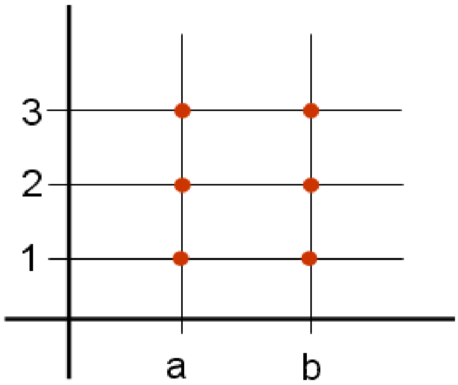

Figura 6.5: Producto cartesiano $B \times A$

La figura (6.4) representa al producto cartesiano $A \times B$*, mientras que la figura (6.5) representa al producto cartesiano* $B \times A$*.*

- $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.
- $B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$.

Note que $A \times B \neq B \times A$*.*

Observación: En general $A \times B \neq B \times A$.

El producto cartesiano entre dos conjuntos posee ciertas propiedades de interés que se listan a continuación:

Propiedades Sean A, B y C conjuntos cualesquiera, tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ y $C \subseteq U$.

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

3. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

4. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

A continuación haremos la demostración formal de la primera de estas propiedades:

Demostrar que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Dado que

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \Leftrightarrow A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C) \wedge (A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C),$$

se debe demostrar que

1. $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$.

2. $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$.

Demostración de $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$.

Dado que

$A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C) \Leftrightarrow$

$\forall (x, y) : (x, y) \in A \times (B \cap C) \rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

Se debe demostrar que

$\forall (x, y) : (x, y) \in A \times (B \cap C) \rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

Sea un (x, y) cualquiera.

Paso		Justificación
1)	$(x, y) \in A \times (B \cap C)$	Premisa Condicional
2)	$x \in A \wedge y \in (B \cap C)$	Def. de $\times$ 1)
3)	$x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$	Def. de $\cap$ en 2)
4)	$(x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \in C)$	Ley de Idem. en 3)
5)	$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$	Ley asociativa para $\wedge$ en 4)
6)	$(x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C$	Def. de $\times$ en 5)
7)	$(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$	Def. de $\cap$ en 6)
8)	$(x, y) \in A \times (B \cap C) \to (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$	Prueba Condicional
9)	$\forall (x, y) : (x, y) \in A \times (B \cap C) \to (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$	Regla GU en 8)
10)	$A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$	Def. de $\subseteq$ en 9).

Demostración de $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$.

Dado que
$(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C) \Leftrightarrow$

$\forall (x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \to (x, y) \in A \times (B \cap C)$.

Se debe demostrar que
$\forall (x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \to (x, y) \in A \times (B \cap C)$.

Sea un $x \in U$ cualquiera.

Paso		Justificación
1)	$(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$	Premisa Condicional
2)	$(x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \in (A \times C)$	Def. de $\cap$ 1)
3)	$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$	Def. de $\times$ en 2)
4)	$(x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \in C)$	Ley asociativa para $\wedge$ en 3)
5)	$x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$	Ley de Idem. en 4)
6)	$x \in A \wedge y \in B \cap C$	Def. de $\cap$ en 5)
7)	$(x, y) \in A \times (B \cap C)$	Def. de $\times$ en 6)
8)	$(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \to (x, y) \in A \times (B \cap C)$	Prueba Condicional
9)	$\forall (x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \to (x, y) \in A \times (B \cap C)$	Regla GU en 8)
10)	$(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$	Def. de $\subseteq$ en 9).

Dado que $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ y $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$ se puede concluir que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Capítulo 7

Herramientas para la inducción

7.1 Potenciación

La operación de potenciación se define como el producto de un número a tantas veces lo indique otro número e, lo cual se denota por a^e, es decir

$$a^e = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{e \text{ veces}},$$

donde a recibe el nombre de base y e recibe el nombre de exponente. Esta operación posee ciertas propiedades que conviene recordar antes de iniciar el tema de inducción matemática.

Propiedades:

1. Potencia de una potencia:
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
2. Multiplicación de potencias de igual base:
$$a^m.a^n = a^{m+n}.$$
3. División de potencias de igual base:
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$
4. Potencia de exponente cero:
$$a^0 = 1.$$

5. Potencia de exponente fraccionario:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

6. Otras propiedades:

$$(a.b)^n = a^n.b^n \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

y en general

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n \quad \text{y} \quad (a-b)^n \neq a^n - b^n.$$

7.2 Inecuaciones

Definición 7.1 *Una inecuación es cualquier expresión matemática válida que involucra cualquiera de los siguientes símbolos* $<$,$>$, $\leq$ *o* $\geq$.

En esta sección estamos interesados en recordar ciertas propiedades de las inecuaciones

1. Tricotomía:
   Para dos números reales cualesquiera, a y b, sólo se cumplirá una de las siguientes afirmaciones:
   - $a < b$.
   - $a = b$.
   - $a < b$.
2. Transitividad:
   Para tres números reales cualesquiera, a, b, y c:
   - Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.
   - Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
3. Simetría:
   - Si $a > b$ entonces $b < a$.
   - Si $a < b$ entonces $b > a$.

4. Adición y substracción:
   Para tres números reales cualesquiera, a, b, y c:

   - Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$.
   - Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.

5. Multiplicación y división:
   Para tres números reales cualesquiera, a, b, y c:

   - Si c es positivo y $a > b$ entonces $ac > bc$ y $a/c > b/c$.
   - Si c es positivo y $a < b$ entonces $ac < bc$ y $a/c < b/c$.
   - Si c es negativo y $a > b$ entonces $ac < bc$ y $a/c < b/c$.
   - Si c es negativo y $a < b$ entonces $ac > bc$ y $a/c > b/c$.

7.3 Sumatoria

La letra griega sigma mayúscula (Σ), es una notación abreviada para designar una suma. Así la suma $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ se puede escribir como:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

que se lee "la sumatoria desde $i = 1$ hasta $i = n$". La variable i es conocida como el índice de la suma, el valor 1 representa al *límite inferior* de la suma *(li)*, mientras que el valor n indica el *límite superior* de la misma *(ls)*. Finalmente el símbolo x_i es conocido como el sumando.

Ejemplo 7.1 *Analice con detenimiento cada uno de los elementos de las siguientes sumas*

- $\sum_{j=3}^{5} w_j = w_3 + w_4 + w_5$.
  En esta suma el índice j toma los siguientes valores $3, 4, 5$.

- $\sum_{k=1}^{5} 3 = \underbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3}_{5 \text{ veces}} = 15 = \boldsymbol{5} \times 3 = (ls - li + 1) \times 3$.
  En esta suma el índice k toma los siguientes valores $1, 2, 3, 4, 5$. El límite inferior de esta suma es 1 mientras que el límite superior es 5 y el sumando es un valor constante (5). Esta suma indica que por cada valor de k se debe sumar el valor de 5.

- $\sum_{i=5}^{8} 10 = \underbrace{10+10+10+10}_{4 \ veces} = 40 = 4 \times 10 = (ls - li + 1) \times 10.$
  En esta suma el índice i toma los siguientes valores $5, 6, 7, 8$. *El límite inferior de esta suma es* 5 *mientras que el límite superior es* 8 *y el sumando es un valor constante (10).*

Propiedades de Σ:

1. $\displaystyle\sum_{i=li}^{ls} a = (ls - li + 1)a.$

2. $\displaystyle\sum_{i=li}^{ls} ax_i = a\sum_{i=li}^{ls} x_i.$

3. $\displaystyle\sum_{i=li}^{ls} x_i + y_i = \sum_{i=li}^{ls} x_i + \sum_{i=li}^{ls} y_i.$

4. $\displaystyle\sum_{i=li}^{ls} x_i - y_i = \sum_{i=li}^{ls} x_i - \sum_{i=li}^{ls} y_i.$

7.4 Productoria

La letra griega pi mayúscula (Π), es una notación abreviada para designar un producto. Así el producto $x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$ se puede escribir como:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i,$$

que se lee "la productoria desde $i = 1$ hasta $i = n$". La variable i es conocida como el índice de la productoria , el valor 1 representa al *límite inferior* de la productoria *(li)*, mientras que el valor n indica el *límite superior* de la misma *(ls)*. Finalmente el símbolo x_i es conocido como el multiplicando.
Antes de colocar algunas propiedades de la productoria, definiremos a la función factorial, que está estrechamente ligada al concepto de productoria.

Definición 7.2 *El factorial de un número n, denotado por $n!$ está definido como*

$$n! = \begin{cases} 0 & si\ n = 0 \\ n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k & si\ n > 0. \end{cases}$$

Observación: Note que la función factorial puede redefinirse como

$$n! = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Esta nueva definción, es una *definición recursiva* de la función factorial.

Propiedades de $\prod$:

1. $\displaystyle\prod_{i=li}^{ls} a = a^{(ls-li+1)}$.

2. $\displaystyle\prod_{i=li}^{ls} ax_i = a^{(ls-li+1)} \prod_{i=li}^{ls} x_i$.

3. $\displaystyle\prod_{i=li}^{ls} x_i \times y_i = \prod_{i=li}^{ls} x_i \times \prod_{i=li}^{ls} y_i$.

4. $\displaystyle\prod_{i=li}^{ls} \frac{x_i}{y_i} = \frac{\prod_{i=li}^{ls} x_i}{\prod_{i=li}^{ls} y_i}$.

5. $\displaystyle\prod_{i=li}^{ls} i = \frac{ls!}{(li-1)!}$.

Capítulo 8

Inducción matemática

Hasta ahora hemos estudiado diversos métodos para establecer la validez de razonamientos lógicos, bien sean, razonamientos basados en la lógica proposicional o en la lógica de predicados. Otro método para demostrar propiedades generales que dependen en algún sentido de los números naturales, es conocido con el nombre de principio de inducción matemática. Para ilustrar cual es el objetivo del principio de inducción matamática, suponga el siguiente escenario: sea $P(n)$ una proposición abierta cuya variable n es un número natural, y suponga que se sabe que existen algunos naturales k_i que logran que $P(k_i)$ sea una proposición verdadera, [1] el principio de inducción responde a la siguiente interrogante: ¿ Será que $P(n)$ es una proposición verdadera para cualquier natural n?.

En vista que en este capítulo trataremos exclusivamente con proposiciones abiertas relativas a los números naturales, conviene establecer los axiomas[2] que definen de manera exacta al conjunto de los números naturales. Estos axiomas fueron formulados el matemático italiano Giuseppe Peano [3] en 1889, razón por la cual son conocidos como los axiomas de Peano.

[1] Recuerde que, cuando la variable que aparece en la proposición abierta o predicado, se reemplaza por una cierta opción válida, se obtiene una proposición lógica.

[2] Proposición tan clara y evidente que se admite (verdadera) sin necesidad de demostración.

[3] Matemático italiano (1858-1932), considerado uno de los fundadores de la lógica matemática.

1. El uno (1) es un número natural, $1 \in \mathbb{N}$. [4]

2. Si a es un natural, entonces $a+1$ también es un natural y se denomina sucesor de a, lo cual se denota por $suc(a)$. Así, si $a \in \mathbb{N}$, entonces $suc(a) = a + 1 \in \mathbb{N}$.

3. El uno (1) no es el sucesor inmediato de ningún número natural:
$$\forall n \in \mathbb{N} : \; suc(n) \neq 1.$$

4. Dos números naturales no tienen el mismo sucesor:
$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \; suc(n) = suc(m) \rightarrow n = m.$$

5. Principio de inducción matemática: Suponga que P es una proposición abierta relacionada a los números naturales. El axioma de inducción matemática afirma que:
Si

   a) $P(1)$ es verdadera, y

   b) Siempre que, si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ es verdadera (para cualquier $k \in \mathbb{N}$ elegido al azar),

   entonces $P(n)$ es verdadera para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

   Observe que el principio de inducción matemática puede expresarse usando cuantificadores de la siguiente manera:
$$[P(0) \wedge (\forall k > 0 : \; P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n \geq 0 : \; P(n).$$

Observación: IMPORTANTE

- La condición a) del principio de inducción se denomina *base inductiva*, y la condición b) es conocida como el *paso inductivo*.

- La elección del uno (1) en la condición a) del principio, no es obligatoria. Lo único que se requiere es que la proposición P sea verdadera para un primer elemento, $n_0 \in \mathbb{N}$ para que el proceso de inducción tenga inicio. Por lo cual el principio de inducción se puede escribir como:
$$[P(n_0) \wedge (\forall k > n_0 : \; P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n \geq n_0 : \; P(n).$$

[4]Considerar el 0 como natural o no es tema de controversia.

- En líneas generales para probar que una proposición abierta P relacionada a los números naturales es verdadera para cualquier natural a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, se hace uso del principio de inducción. En primer lugar se debe probar que $P(n_0)$ es una proposición verdadera. En segundo lugar se debe demostrar que la proposición cuantificada $\forall k > n_0 : \ P(k) \to P(k+1)$ es consecuencia lógica de un conjunto de axiomas o verdades matemáticas, para ello recurrimos a nuestros conocimientos ya adquiridos en lógica de predicados, es decir, aplicamos la regla de particularización universal y trataremos de probar que $P(k) \to P(k+1)$ para un $k \in \mathbb{N}$ cualquiera, es *consecuencia lógica* de un conjunto de axiomas. Ahora bien, en este punto tenemos un razonamiento lógico con la siguiente estructura:

$$\begin{array}{c} Axiomas \\ \hline \therefore \ P(k) \to P(k+1) \end{array}$$

  y para establecer la validez de este razonamiento, podemos usar el método de prueba condicional, el cual nos dice que, siempre que tengamos un argumento cuya conclusión es una proposición condicional, podemos asumir el antecedente de dicha proposición condicional, en este caso $P(k)$, como una nueva premisa y el objetivo es desprender del nuevo conjunto de premisas el consecuente de la proposición condicional, en este caso, $P(k+1)$. Por lo anterior, tenemos que la nueva estructura del razonamiento es:

$$\begin{array}{c} Axiomas \\ P(k) \\ \hline \therefore \ P(k+1) \end{array}$$

  dado que $P(k)$ se asume verdadera, recibe el nombre de *Hipótesis inductiva* y en vista que se desea establecer que $P(k+1)$ es una consecuencia lógica de las premisas, recibe el nombre de *Tesis inductiva*.

Con el fin de entender mejor el uso del principio de inducción matemática colocaremos unos cuantos ejemplos para ilustrar el uso de esta técnica demostrativa.

Ejemplo 8.1 *Sea*

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \textit{para } n \geq 1.$$

Demostrar que $P(n)$ es verdadera para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

Observación:

- *Note que $P(n)$ es una proposición abierta, pues contiene al menos una variable, en esta caso n, y cuando n toma un valor particular, se obtiene una proposición: Suponga que $n = 2$, en este caso estamos en capacidad de decidir cuál es el valor de verdad de $P(2)$. Para ello basta con responder la pregunta:*

$$\text{¿ Es cierto que } \sum_{i=1}^{2} i = \frac{2 \times 3}{2}?$$

  y es claro que la respuesta es afirmativa, por lo tanto $P(2)$ es una proposición con valor de verdad verdadero:

  1. $\sum_{i=1}^{2} i = 1 + 2 = 3$.
  2. $\frac{2\times 3}{2} = 6/2 = 3$.

  Dado que (1) es igual a (2), se tiene que $P(2)$ es verdadera.

- *El enunciado dice que $P(n)$ es probable que sea verdadera a partir de $n = 1$ razón por la cual la base inductiva viene dada por $P(1)$.*

- ***Base inductiva** en $n = 1$*
  ¿Es $P(1) : \sum_{i=1}^{1} i = \frac{1\times 2}{2}$ una proposición verdadera?.

  1. $\sum_{i=1}^{1} i = 1$.
  2. $\frac{1\times 2}{2} = 1$.

  Dado que (1) es igual a (2), se tiene que $P(1)$ es verdadera.

- ***Hipótesis inductiva:*** $P(k) : \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$.

- ***Tesis inductiva:*** $P(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Demostración:

Observación: *Recuerde que se desea demostrar $\sum_{i=1}^{k+1} i$ es igual a $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ sabiendo que $P(k)$ es una proposición verdadera, es decir, es cierto que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$.*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= 1+2+3+\cdots+k+(k+1) && \textit{Def. de } \Sigma. \\
&= \sum_{i=1}^{k} i+(k+1) && \textit{Def. de } \Sigma. \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) && \textit{Hipótesis inductiva.} \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} && \textit{Suma.} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} && \textit{Factor común } (k+1).
\end{aligned}$$

De donde se desprende que $P(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ *es una proposición verdadera, por lo tanto* $P(k) \rightarrow P(k+1)$ *es también verdadera y por generalización universal* $\forall k > 1 : \ P(k) \rightarrow P(k+1)$ *es verdadera y dado que* $P(1)$ *es también verdadera, se puede concluir, por el principio de inducción matemática, que* $P(n)$ *es verdadera para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 1$.

Ejemplo 8.2 *Sea*

$$Q(n) : n! \geq 2^{n-1}, \quad \textit{para } n \geq 1.$$

Demostrar que $Q(n)$ *es verdadera para cualquier valor de* $n \in \mathbb{N}$.

- ***Base inductiva*** *en* $n = 1$
  ¿Es $Q(1) : 1! \geq 2^0$ *una proposición verdadera?.*

  1. $1! = 1$.
  2. $2^0 = 1$.

  Dado que (1) es mayor o igual a (2), se tiene que $Q(1)$ *es verdadera.*

- ***Hipótesis inductiva:*** $Q(k) : k! \geq 2^{k-1}$.

- ***Tesis inductiva:*** $Q(k+1) : (k+1)! \geq 2^k$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
(k+1)! &= k!(k+1) && \textit{Def. de factorial.} \\
&\geq 2^{k-1}(k+1) && \textit{Hipótesis inductiva.} \\
&\geq 2^{k-1}2 && k+1 \geq 2 \\
&= 2^k && \textit{Multiplicación de potencias de igual base.}
\end{aligned}$$

De donde se desprende que $Q(k+1) : (k+1)! \geq 2^k$ *es una proposición verdadera, por lo tanto* $Q(k) \to Q(k+1)$ *es también verdadera y por generalización universal* $\forall k > 1 : \; Q(k) \to Q(k+1)$ *es verdadera y dado que* $Q(1)$ *es también verdadera, se puede concluir, por el principio de inducción matemática, que* $Q(n)$ *es verdadera para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 1$.

Bibliografía

[1] A. Muñoz García. *Lógica simbólica elemental*. Ediatorial Miró, Venezuela, 1992.

[2] W.K. Grassman and J.P. Tremblay. *Matemáticas discretas y lógica*. Prentice Hall, United States, 1997.

[3] R.P. Grimaldi. *Matemáticas discretas y combinatoria*. Prentice Hall, United States, 1994.

[4] P.J. Iranzo. *Lógica simbólica para informáticos*. Alfaomega, Madrid, Spain, 2005.

[5] R. Johnsonbaugh. *Matemáticas discretas*. Pearson and Prentice Hall, United States, 1999.

[6] P. Suppes. *Introducción a la lógica simbólica*. Continental, Madrid, Spain, 1980.